教育部 103 學年度高級中學數學競賽

中投區複賽試題（二）【解答】

一、 90	五、 $\dfrac{3\sqrt[3]{2}}{4}$
二、 4497	六、 $\dfrac{105}{16}$
三、 1683	七、 28
四、 (1) $\dfrac{5}{18}$　(2) $\dfrac{161}{396}$	

一、【解】

如果 $a_n = k$，則 $k-\frac{1}{2} \le \sqrt{n} < k+\frac{1}{2}$，即 $k^2-k+\frac{1}{4} \le n < k^2+k+\frac{1}{4}$，

在這個區間共有 $2k$ 個整數，因為 $2070 = 45^2+45$，所以

$$\sum_{n=1}^{2070}\frac{1}{a_n} = \sum_{k=1}^{45}\frac{2k}{k} = 90.$$

二、【解】

$f(93)+f(90) = 90^2 \cdots (1)$

$f(90)+f(87) = 87^2 \cdots (2)$

$f(33)+f(30) = 30^2$

$(1)-(2)$　$f(93)-f(87) = 90^2-87^2$

$f(87)+f(84) = 84^2$

$f(93)+f(84) = 90^2-87^2+84^2$

$\vdots$

$$\begin{aligned} f(93)+f(30) &= 90^2-87^2+\cdots+30^2 \\ &= 3\times(177+\cdots+69)+900 \\ &= 4590 \end{aligned}$$

$f(30) = 4590-93 = 4497$

三、【解】

設 $\vec{x}=(1,1)$ 走 k 步， $\vec{y}=(1,0)$ 走 k_1 步， $\vec{z}=(0,1)$ 走 k_2 步

則 $(0,0)+k(1,1)+k_1(1,0)+k_2(0,1)=(5,5)\Rightarrow(k+k_1,k+k_2)=(5,5)$

$\Rightarrow k_1=5-k,k_2=5-k(k=0,1,2,3,4,5)\Rightarrow k+k_1+k_2=10-k$

每一個由 $(0,0)$ 到 $(5,5)$ 的路徑都有一個相對的總數 $10-k$ 個向量 $\vec{x},\vec{y},\vec{z}$

的排列(其中 $\vec{x}$ 有 k 個，$\vec{y}$ 有 k_1 個，$\vec{z}$ 有 k_2 個)。

因此路徑的總數是 $\displaystyle\sum_{k=0}^{5}\frac{(10-k)!}{k!(5-k)!(5-k)!}=252+630+560+210+30+1=1683.$

四、【解】

總共有 $5+6+7=18$ 個球，一次完整的抽球過程即為此 18 個球的一種排列，故共有 $18!$ 種抽球結果(視為不同物排列)。

(1)最後抽出的球是紅色的排列數有 $5\cdot 17!$,故此事件的機率為 $\dfrac{5\cdot 17!}{18!}=\dfrac{5}{18}$

(2)紅球最先被抽完等同於被抽完的球的顏色順序為紅白黑或紅黑白

其中“紅白黑”的機率為

$P(\text{紅白黑})=P(\text{黑最後})P(\text{紅白黑}\mid\text{黑最後})$

但 $P(\text{黑最後})=\dfrac{7}{18}$,

$P(\text{紅白黑}\mid\text{黑最後})=\dfrac{\text{白}}{\text{紅}+\text{白}}=\dfrac{6}{5+6}=\dfrac{6}{11}$

所以 $P(\text{紅白黑})=\dfrac{7}{18}\cdot\dfrac{6}{11}$

類似的，

$P(\text{紅黑白})=\mathrm{P}(\text{白最後})\mathrm{P}(\text{紅黑白}\mid\text{白最後})$

$$=\frac{6}{18}\cdot\frac{\text{黑}}{\text{紅}+\text{黑}}=\frac{6}{18}\cdot\frac{7}{5+7}=\frac{6}{18}\cdot\frac{7}{12}$$

故 $P(\text{紅最先抽完})=\dfrac{7}{18}\cdot\dfrac{6}{11}+\dfrac{6}{18}\cdot\dfrac{7}{12}=\dfrac{161}{396}$

五、【解】

由對稱性可假設圓方程式為 $x^2+(y-r)^2=r^2$

$\therefore y=r-\sqrt{r^2-x^2}\geq x^4$

令 $x=r\cos\theta,\ 0\leq\theta<\dfrac{\pi}{2}$

$r-r\sin\theta\geq r^4\cos^4\theta$

$\therefore r^3\leq\dfrac{1-\sin\theta}{\cos^4\theta}=\dfrac{1}{(1-\sin\theta)(1+\sin\theta)^2}$

求 $\dfrac{1}{(1-\sin\theta)(1+\sin\theta)^2}$ 極小值

也就是求 $(1-\sin\theta)(1+\sin\theta)^2$ 極大值。

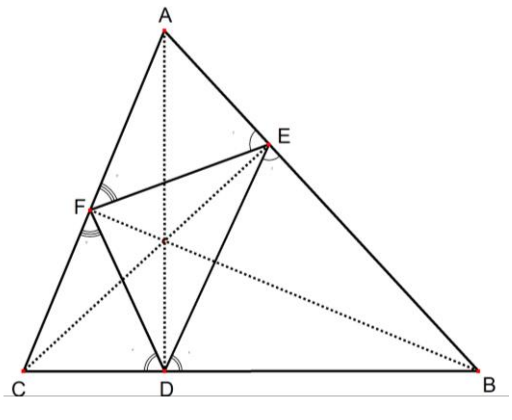
因為 $\dfrac{2}{3}=\dfrac{(1-\sin\theta)+\dfrac{1}{2}(1+\sin\theta)+\dfrac{1}{2}(1+\sin\theta)}{3}\geq\left[\dfrac{1}{4}(1-\sin\theta)(1+\sin\theta)^2\right]^{\frac{1}{3}}$

且"$=$"發生在 $1-\sin\theta=\dfrac{1}{2}(1+\sin\theta)$ 時，即 $\sin\theta=\dfrac{1}{3}$.

因此 $(1-\sin\theta)(1+\sin\theta)^2$ 的極大值為 $(1-\dfrac{1}{3})(1+\dfrac{1}{3})^2=\dfrac{32}{27}$

得 $r\leq\dfrac{3\sqrt[3]{2}}{4}$，故 r 的最大值為 $\dfrac{3\sqrt[3]{2}}{4}$.

六、【解】



當 DEF 反射角 x,y,z 滿足：

$x+y=\angle A+\angle B$

$y+z=\angle B+\angle C$

$z+x=\angle A+\angle C$

唯一解為 $x=\angle A,\ y=\angle B,\ z=\angle C.$

$\therefore \Delta ABC\sim\Delta AEF\sim\Delta DBF\sim\Delta DEC$

令 $\overline{BC}=a,\ \overline{AC}=b,\overline{AB}=c,\ \overline{EF}=\alpha,\ \overline{DF}=\beta,\ \overline{DE}=\gamma$，則

$\dfrac{\alpha}{a}=\dfrac{\overline{AF}}{b}=\dfrac{\overline{AE}}{c},\ \dfrac{\beta}{b}=\dfrac{\overline{BD}}{c}=\dfrac{\overline{BF}}{a},\ \dfrac{\gamma}{c}=\dfrac{\overline{CE}}{a}=\dfrac{\overline{CD}}{b},$

代入：$\overline{BD}+\overline{DC}=a,\ \overline{CE}+\overline{EA}=b,\ \overline{AF}+\overline{FB}=c,$得

$$\frac{\beta}{b}\cdot c+\frac{\gamma}{c}\cdot b=a \qquad \alpha=\frac{a(b^2+c^2-a^2)}{2bc}$$

$$\frac{\alpha}{a}\cdot c+\frac{\gamma}{c}\cdot a=b \quad \text{得} \quad \beta=\frac{b(a^2+c^2-b^2)}{2ac}$$

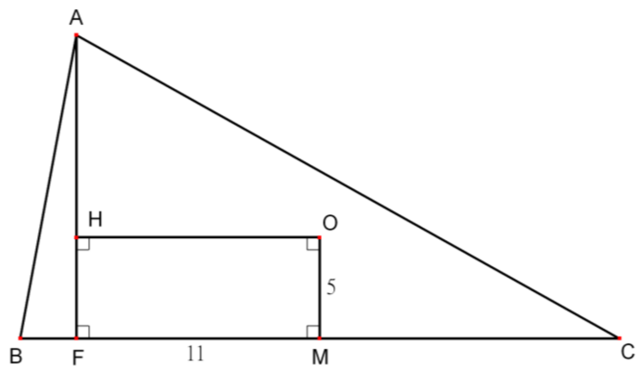
$$\frac{\alpha}{a}\cdot b+\frac{\beta}{b}\cdot a=c \qquad \gamma=\frac{c(a^2+b^2-c^2)}{2ab}$$

最小周長為

$$\alpha+\beta+\gamma=\frac{(a^2+b^2+c^2)^2-2(a^4+b^4+c^4)}{2abc}$$

$$=\frac{(4^2+5^2+6^2)^2-2(4^4+5^4+6^4)}{2\cdot4\cdot5\cdot6}=\frac{105}{16}$$

七、【解】



首先建立適當的直角坐標系於上圖中。

因 $\overline{BM}=\overline{MC}$ 與 $\overline{BO}=\overline{OC}$,所以選 $\overleftrightarrow{OM}$ 為 y 軸，$\overleftrightarrow{OH}$ 為 x 軸

因此 $O=(0,0),\ H=(-11,0),\ F=(-11,-5),\ M=(0,-5),$

$B=(-x,-5),\ C=(x,-5),\ A=(-11,y)$，其中 $x>0,\ y>0$

直線 $\overleftrightarrow{BH}$ 之斜率為 $\dfrac{5}{x-11}$，直線 $\overleftrightarrow{AC}$ 之斜率為 $\dfrac{-(y+5)}{x+11}$.

因 $\overleftrightarrow{BH}\perp\overleftrightarrow{AC}$，所以 $\dfrac{5}{x-11}\cdot\dfrac{-(y+5)}{x+11}=-1$，得 $5(y+5)=(x-11)(x+11)$

又 $\overline{AO}=\overline{BO}$，因此 $y^2+11^2=x^2+5^2$，由上一等式代入第二等式，得

$y^2-5y-50=0$.解方程得 $y=10$ 或 $y=-5$(不合)。

所以 $y=10,\ x=14$

故 $\overline{BC}$ 長為 28.