

教育部 103 學年度高級中學數學競賽

中投區複賽試題 (二)

編號：_____

(時間一小時)

注意事項：

1. 本試卷共七題填充題，滿分為二十一分。
2. 請將答案寫在答案欄內，計算紙必須連同試卷交回。

一、令 a_n 等於最靠近 \sqrt{n} 的整數，例如 $a_1=1, a_2=1, a_3=2$ ，計算 $\sum_{n=1}^{2070} \frac{1}{a_n}$ 。

二、對每一正整數 n ， $f(n)+f(n+3)=n^2$ 恆成立，若 $f(93)=93$ ，求 $f(30)$ 。

三、在座標平面上從點 $(0,0)$ 走到點 $(5,5)$ 。如果每一次只能走 $(1,0)$ ， $(0,1)$ 或 $(1,1)$ 這三個向量的大小和方向，試問共有多少可能的走法？

四、袋子裡有 5 個紅球，6 個白球，7 個黑球，每次隨機抽出一球不放回，直到抽完袋中所有的球。求下列各事件的機率：

(1) 最後抽出的球是紅色的。(2) 紅球最先被抽完。

五、在座標平面上將一個過原點且半徑為 r 的圓完全放入 $y \geq x^4$ 的區域內，此時 r 的最大值是多大？

六、銳角三角形 ABC 的三邊長為 $\overline{AB}=4, \overline{BC}=5, \overline{AC}=6$ ，在三邊 $\overline{BC}, \overline{AC}, \overline{AB}$ 上各取一點 D, E, F ，使得 $\angle AEF = \angle CED, \angle CDE = \angle BDF, \angle BFD = \angle AFE$ ，求三角形 DEF 之周長。

七、下圖的矩形 $HOMF$ 中 $\overline{FM}=11, \overline{OM}=5$ 。

點 H 為三角形 ABC 之三高三之交點，點 O 為三角形 ABC 之外接圓的圓心且點 M 為 BC 之中點。試求 \overline{BC} 之長。

