教育部 103 學年度高級中學數學競賽

中投區複賽試題（一）【解答】

一、【解】

令 $x = 10^{100}$, $y = -3$. 由等式

$$x^{200} - y^{200} = (x-y)(x^{199} + x^{198}y + \cdots + xy^{198} + y^{199})$$

可得

$$I = \frac{10^{20000} - 3^{200}}{10^{100} + 3} = (10^{100})^{199} - (10^{100})^{198}3 + \cdots + 10^{100}3^{198} - 3^{199}$$

所以 I 為一整數。

因為 $\dfrac{3^{200}}{10^{100}+3} = \dfrac{9^{100}}{10^{100}+3} < 1$，因此 $I = \left[\dfrac{10^{20000}}{10^{100}+3}\right]$

所以 $I \equiv -3^{199} \equiv -3^{3}(81)^{49} \equiv -27 \equiv 3 \pmod{10}$.

個位數字為 3.

二、【解】

令 $S_n = \dfrac{C_{3n}^{6n} C_n^{3n}}{2(2n+1)C_n^{2n}}$

則 $S_{n+1} = \dfrac{6(6n+5)(6n+1)S_n}{(n+1)(2n+3)} \in \mathbb{Z}$

因此 $(2n+3) \mid 6(6n+5)(6n+1)S_n$.

因為 $\gcd(2n+3,2) = \gcd(2n+3,6n+5) = \gcd(2n+3,6n+1) = 1$, $(2n+3) \mid 3S_n$,

即 $2(2n+1)(2n+3)C_n^{2n}$ 整除 $3C_{3n}^{6n}C_n^{3n}$.

三、【解】

不失一般性，假設 $a \ge b \ge c$，於是

$a+b \ge a+c \ge b+c$

因此 $\dfrac{1}{b+c} \ge \dfrac{1}{a+c} \ge \dfrac{1}{a+b}$

由排序不等式知

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{a+c}+\frac{c^2}{a+b}\geq\frac{c^2}{b+c}+\frac{a^2}{a+c}+\frac{b^2}{a+b}$$
$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{a+c}+\frac{c^2}{a+b}\geq\frac{b^2}{b+c}+\frac{c^2}{a+c}+\frac{a^2}{a+b}$$

兩式相加得

$$\begin{aligned}2\left(\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{a+c}+\frac{c^2}{a+b}\right)&\geq\frac{b^2+c^2}{b+c}+\frac{a^2+c^2}{a+c}+\frac{a^2+b^2}{a+b}\\&\geq\frac{1}{2}(b+c)+\frac{1}{2}(a+c)+\frac{1}{2}(a+b)\\&=a+b+c=1\end{aligned}$$

所以 $\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{a+c}+\frac{c^2}{a+b}\geq\frac{1}{2}$.

四、【証明】

設公切線過 $(u,f(u)),\ (v,g(v))$

切線方程式 $y-f(u)=f'(u)(x-u)\quad f'(u)=2u-2a$

$$y-g(v)=g'(v)(x-v)\quad g'(v)=-2v$$

得聯立

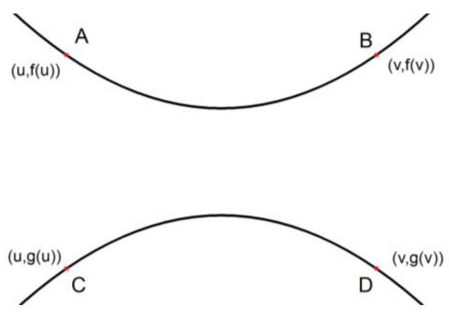
$$\begin{cases}f'(u)=g'(v)\\ f'(u)(x-u)+f(u)=g'(v)(x-v)+g(v)\end{cases}$$

解得 $u+v=a,\ u^2+v^2=1\ \Rightarrow uv=\frac{a^2-1}{2}$

所以 u,v 為 $x^2-ax+\frac{a^2-1}{2}=0$ 兩解

四點為 $A:(u,f(u))\ \ B:(v,f(v))$

$C:(u,g(u))\ D\quad v(g,$



$\overline{CD}^2 = (u-v)^2 + (g(u)-g(v))^2 = (2-a^2)(1+a^2)$

$\overline{AC} = \left| f(u) - g(u) \right| = 2 - a^2$

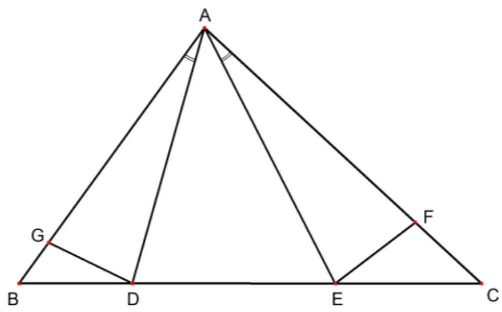
$\overline{AB}^2 = (2-a^2)(1+a^2)$

$\square ABCD:$平行四邊形

$\therefore 2(\sqrt{(2-a^2)(1+a^2)} + 2 - a^2) = 6$

$\therefore a = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

五、 **【証明】**



設$\angle BAD = \angle CAE = \theta$

因為$\overline{AC} > \overline{AB}$,所以$\angle ABD > \angle ACE$

又$\angle AEC = \angle ABD + \angle BAE > \angle ACE$

因此，$\overline{AC} > \overline{AE}.$

若$\overline{AD} \geq \overline{AB}$,則$\overline{AC} + \overline{AD} > \overline{AB} + \overline{AE}$成立。

所以不妨假設$\overline{AD} < \overline{AB}$.今分別在$\overline{AC}$取一點$F$,

在$\overline{AB}$上取一點G,使得$\overline{AF} = \overline{AE}$, $\overline{AG} = \overline{AD}$.因為

$\angle ADE = \angle ABD + \theta > \angle ACE + \theta > \angle AED$,所以$\overline{AE} > \overline{AD}.$

觀察ΔAGD和ΔAEF, $\angle GAD = \angle EAF$, $\overline{AF} = \overline{AE} > \overline{AD} = \overline{AG}$,因此

$\overline{EF} > \overline{DG}$.另外，$\angle AFE = \angle AGD$,

所以，$\angle EFC = \angle BGD$, 現在將ΔBGD和ΔCFE重疊，

使得$\angle EFC$和$\angle BGD$重疊，$\overline{GD}$和$\overline{FE}$重疊，如下圖

因為$\overline{GD} < \overline{EF}$且$\angle GBD > \angle ECF$,

所以必如右圖，因此得知

$\overline{BG} < \overline{CF}$,由此得

$\overline{AC} - \overline{AE} = \overline{CF} > \overline{BG} = \overline{AB} - \overline{AD}$

故得$\overline{AC} + \overline{AD} > \overline{AB} + \overline{AE}.$