

教育部 103 學年度高級中學數學競賽

中投區複賽試題 (一)

編號：_____

(時間二小時)

注意事項：

1. 本試卷共五題計算證明題，滿分為四十九分。
2. 請將答案寫在答案欄內，計算紙必須連同試卷交回。

一、請問整數 $\left[\frac{10^{20000}}{10^{100} + 3} \right]$ 以十進位表示出來時的個位數字為何？其中 $[x]$ 表示不大於 x 的最大整數。

二、已知對所有的正整數 n , $2(2n+1)C_n^{2n}$ 可整除 $C_{3n}^{6n} C_n^{3n}$.

證明： $2(2n+1)(2n+3)C_n^{2n}$ 可整除 $3C_{3n}^{6n} C_n^{3n}$.

三、設 a, b, c 為正數且 $a+b+c=1$. 證明：

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{a+c} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{1}{2}.$$

四、函數 $f(x) = x^2 - 2ax$ 與 $g(x) = -x^2 - 1$ 的圖形有兩條公切線且可得到四個切點，若此四個切點組成的四邊形周長為 6，求實數 a 的值。

五、下圖的 $\triangle ABC$ 中 $\overline{AC} > \overline{AB}$ 且

$$\angle BAD = \angle CAE,$$

證明： $\overline{AC} + \overline{AD} > \overline{AB} + \overline{AE}$.

