臺北市 103 學年度

普通型高級中等學校數學及自然學科能力競賽

(數學科筆試二答案欄) 參考答案

編號：____________________（學生自填）

注意事項：

1. 本試卷共七題填充題，每題 3 分，滿分為 21 分。
2. 考試時間：1 小時。
3. 試題及計算紙必須連同答案卷交回。
4. 將答案填寫在答案欄內。

答　案　欄

(一)	(二)	(三)	(四)
$(-1,5)$ 與 $(-5,1)$	$16\sqrt{14}$	$102\frac{102}{103}$ 或 $\frac{10608}{103}$	$\frac{12\sqrt{6}}{7}$

(五)	(六)	(七)
511	999888	$5^6+5^5+5^2+5^1+5^0$ 或 18781

總分：____________________

臺北市 103 學年度

普通型高級中等學校數學及自然學科能力競賽

(數學科筆試二參考解答)

1. 已知拋物線 $y=x^2+7x+11$ 上有兩相異點對直線 $x+y=0$ 成對稱，則此兩相異點的坐標為＿（一）＿。

【參考解答】

設其中一點的坐標為 (u,v)，則另一點的坐標為 $(-v,-u)$。依題目的假設可知

$u\neq -v$，而且

$$\begin{cases} v=u^2+7u+11 \\ -u=v^2-7v+11 \end{cases}。$$

兩式相減，即得

$$u+v=(u+v)(u-v)+7(u+v)，$$

$$(u+v)(u-v+6)=0。$$

因為 $u+v\neq 0$，所以 $u-v+6=0$。代入上述第一式，得

$$u+6=u^2+7u+11，$$

$$u^2+6u+5=0，$$

$$(u+1)(u+5)=0，$$

$$u=-1，或 u=-5。$$

所求兩點的坐標為 $(-1,5)$ 與 $(-5,1)$。

2. 已知某平行四邊形的兩對角線長分別為 12 及 $8\sqrt{2}$。若此平行四邊形的四邊長都是整數，則其面積為＿（二）＿。

【參考解答】

設平行四邊形的兩邊為 $\left|\overrightarrow{a}\right|\geq\left|\overrightarrow{b}\right|$，對角線段 $\left|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\right|=12$，$\left|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}\right|=8\sqrt{2}$，則由平行四邊形定理，$\left|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\right|^2+\left|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}\right|^2=2\left(\left|\overrightarrow{a}\right|^2+\left|\overrightarrow{b}\right|^2\right)$，得知 $\left|\overrightarrow{a}\right|^2+\left|\overrightarrow{b}\right|^2=136$。

又 $\left|\overrightarrow{a}\right|,\left|\overrightarrow{b}\right|$ 均為正整數，故 $\left|\overrightarrow{a}\right|=10,\left|\overrightarrow{b}\right|=6$。再由

$$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=\frac{1}{4}\left(\left|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\right|^2-\left|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}\right|^2\right)=\frac{1}{4}(144-128)=4,$$

得 $\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}}{\left|\overrightarrow{a}\right|\cdot\left|\overrightarrow{b}\right|}=\dfrac{1}{15}$，故 $\sin\theta=\dfrac{4\sqrt{14}}{15}$；因此，所求面積為 $10\cdot 6\cdot\dfrac{4\sqrt{14}}{15}=16\sqrt{14}$。

3. 已知 $\sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}}+\cdots+\sqrt{1+\frac{1}{102^2}+\frac{1}{103^2}}$ 為有理數，則此有理數為__(三)__。(以假分數表示)

【參考解答】

$$\begin{aligned}
&\sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}}+\cdots+\sqrt{1+\frac{1}{102^2}+\frac{1}{103^2}}\\
&=\sum_{k=1}^{102}\sqrt{1+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}}\\
&=\sum_{k=1}^{102}\sqrt{\frac{k^4+2k^3+3k^2+2k+1}{k^2(k+1)^2}}\\
&=\sum_{k=1}^{102}\frac{k^2+k+1}{k^2+k}\\
&=\sum_{k=1}^{102}\left(1+\frac{1}{k(k+1)}\right)\\
&=102+\sum_{k=1}^{102}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\\
&=102+1-\frac{1}{103}\\
&=102+\frac{102}{103}=\frac{10608}{103}.
\end{aligned}$$

4. 已知 ΔABC 中，$\overline{AB}=6$，$\overline{BC}=5$，$\overline{CA}=7$； P 為其三邊上或內部的任一點，D, E 及 F 分別在 $\overline{AB}$，$\overline{BC}$ 及 $\overline{CA}$ 三邊上且 $\overline{PD}\perp\overline{AB}$，$\overline{PE}\perp\overline{BC}$ 及 $\overline{PF}\perp\overline{CA}$；則 $\overline{PD}+\overline{PE}+\overline{PF}$ 的最小值為__(四)__。

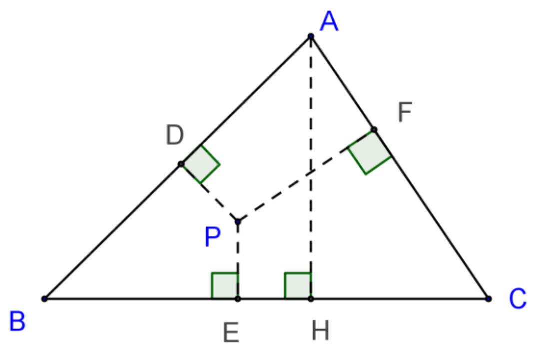
【參考解答】

一般而言，其最小值等於最長邊上的高長（見**【註】**）。

故得其值為$\overline{CA}$邊上的高長$h_7=\dfrac{2\Delta}{7}$，

故得$\dfrac{2\sqrt{9\cdot3\cdot4\cdot2}}{7}=\dfrac{12\sqrt{6}}{7}$.（由$s=\dfrac{5+6+7}{2}=9$，$\Delta$為其面積）

【**註**】設$\overline{BC}\ge\overline{BA},\overline{CA}$，$\overline{AH}\perp\overline{BC}$. 如圖



$\Delta ABC=\Delta PAB+\Delta PBC+\Delta PCA$,

故得

$$\frac{1}{2}\overline{BC}\cdot\overline{AH}=\frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{PD}+\frac{1}{2}\overline{BC}\cdot\overline{PE}+\frac{1}{2}\overline{AC}\cdot\overline{PF}$$

所以

$$\begin{aligned}\overline{BC}\cdot\overline{AH}&=\overline{AB}\cdot\overline{PD}+\overline{BC}\cdot\overline{PE}+\overline{AC}\cdot\overline{PF}\\&\le\overline{BC}\left(\overline{PD}+\overline{PE}+\overline{PF}\right)\end{aligned}$$

故推得

$$\overline{PD}+\overline{PE}+\overline{PF}\ge\overline{AH}.$$

且「=」成立$\Leftrightarrow P$為頂點A; 故知$\overline{PD}+\overline{PE}+\overline{PF}$的最小值為

$$\overline{AH}=\frac{2\Delta}{a}=\frac{2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{a},$$

其中$s=\dfrac{a+b+c}{2}$為半周長。

5. 從 1, 2, 3,…, 10 的十個連續整數中任意選出若干個，使得這些數的和為偶數，則共有__（五）__種取法。

【參考解答】

從 5 個奇數中取出偶數個的取法有 $C_0^5+C_2^5+C_4^5=1+10+5=16$，每個偶數均可取或不取，則 5 個偶數的取法有 $2^5=32$ 種，故共有 $32\times16-1=511$ 種。

6. 若正整數 $n\geq1000$ 是 4 的倍數，且 n 中任意四個位數的數字和都不是 4 的倍數，則 n 的最大值為__（六）__。

【參考解答】

先證明 n 至多為六位數。假設 $n=a_1a_2\cdots a_k$ 為 k 位數，其中 $k\geq7$。因為 a_1,a_2,a_3 三數中必有兩數和為偶數，可設 $a_1+a_2=2p$ 為偶數。同樣的，a_3,a_4,a_5 三數中必有兩數和為偶數，可設 $a_3+a_4=2q$ 為偶數；再由其餘 a_5,a_6,a_7 三數中必有兩數和為偶數，可設 $a_5+a_6=2r$ 為偶數。又 p,q,r 三數中也會有兩數和為偶數，可設 $p+q=2m$ 為偶數。因此，

$$a_1+a_2+a_3+a_4=2p+2q=2\left(p+q\right)=4m$$ 為 4 的倍數，矛盾！

故 $n<10^6$。再檢驗 999889~999999 都不滿足所求，而 n=999888 滿足所求；故所求最大的正整數 n=999888。

7. 設集合 A 的元素是 $5^0,\ 5^1,\ 5^2,\ldots$ 及 5 的不同乘冪之和。若將 A 的元素由小到大排成一數列，則此數列第 103 項的值為__（七）__。

【參考解答】

此數列為 $5^0,5^1,5^0+5^1,5^2,5^0+5^2,5^1+5^2,\ldots$

將此數列表成五進位為 1,10,11,100,101,110,…

若將項數 1,2,3,4,5,6,…用二進位表示為 1,10,11,100,101,110,…與上列五進位同。因此，103 的二進位表示為 $\left(1100111\right)_2$，故 103 項為

$\left(1100111\right)_5=5^6+5^5+5^2+5^1+5^0=18781$。