臺北市 103 學年度
普通型高級中等學校數學及自然學科能力競賽
(數學科筆試一參考解答)

問題一： 已知 x, y, z 為正實數，滿足 $\left(1+z^2\right)\left(1+\left(1+x^2\right)\left(1+y^2\right)\right)=\left(x+y+z\right)^2$ 。

在所有滿足上式的 x, y, z 中，令 $y=f(x)$，$z=g(x)$，求 $f(x)$ 與 $g(x)$ 。

(12 分)

【參考解答】：由柯西不等式 $\left(x+y+z\right)^2 \le \left(1+\left(x+y\right)^2\right)\left(1+z^2\right)$ 與原式比較，得 $\left(1+x^2\right)\left(1+y^2\right)\le\left(x+y\right)^2$. 化簡得 $\left(xy-1\right)^2\le 0$. 故 $xy=1$，$y=\dfrac{1}{x}$. 且柯西不等式的等號成立，得 $z\left(x+y\right)=1$. $z=\dfrac{1}{x+y}=\dfrac{1}{x+\frac{1}{x}}=\dfrac{x}{x^2+1}$. 反之，若 $xy=1$ 且 $z\left(x+y\right)=1$，則原式成立。故 $f(x)=\dfrac{1}{x}$，$g(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$.

問題二： 將 2014 表示成三個正整數和的方法總共有多少種？

(這三個正整數不必都相異且與次序無關，例如 $1+1+2012$，$1+2012+1$，$2012+1+1$ 都視為同一種)

(12 分)

【參考解答一】：由本問題中的 n_1, n_2, n_3 排列順序不同視為同一種，所以本問題是要找的序對 (n_1, n_2, n_3) 需同時滿足：(1) $1\le n_1\le n_2\le n_3$;及(2) $n_1+n_2+n_3=103$.
我們將證明更一般性的結果：對每一個正整數 $n\ge 3$，滿足：(1) $1\le n_1\le n_2\le n_3$；及(2) $n_1+n_2+n_3=n$ 的正整數序對 (n_1, n_2, n_3) 共有 $\left[\dfrac{n^2}{12}\right]$ 組，其中 $[x]$ 表示最接近 x 的整數.
對每一個正整數 $n\ge 3$，我們以 t_n 表示滿足所求的組數. 對每一個正整數 $n\ge 2$，我們以 d_n 表示滿足：(1) $1\le n_1\le n_2$；及(2) $n_1+n_2=n$ 的正整數數對 (n_1, n_2) 的組數. 顯然 $d_2=d_3=1$，以數學歸納法不難證明：

$$d_n=\begin{cases}\dfrac{n-1}{2} & \text{若}\, n \,\text{為奇數;}\\[2ex] \dfrac{n}{2} & \text{若}\, n \,\text{為偶數.}\end{cases}$$

不難看出 $t_3=t_4=1$，$t_5=2$. 對於 $n\ge 6$，因為當 $n_1=1$ 時，滿足所求的序對 $(1, n_2, n_3)$ 有 d_{n-1} 組. 當 $n_1\ge 2$ 時，滿足所求的序對 (n_1, n_2, n_3) 與將 $n-3$ 表示成三個正整數和的

序對 (n_1-1, n_2-1, n_3-1) 恰為一一對應，所以：$t_n = d_{n-1}+t_{n-3}$.

考慮 $n=6k+4$ 的情形 (因為 $2014=6\times335+4$)，其中 k 為一正整數.

$$\begin{aligned}
t_n &= (t_{6k+4}-t_{6k+1})+(t_{6k+1}-t_{6k-2})+(t_{6k-2}-t_{6k-5})+\cdots+(t_7-t_4)+t_4\\
&= d_{6k+3}+d_{6k}+d_{6k-3}+\cdots+d_6+t_4\\
&= (3k+1)+3k+(3k-1)+\cdots+3+1\\
&= \frac{n^2-4}{12}.
\end{aligned}$$

$\dfrac{(2014)^2-4}{12}=338016$，所以滿足所求的序對 (n_1, n_2, n_3) 共有 338016 組.

【註】：事實上，當 $n=6k$ 時，$t_n = n^2/12$；當 $n=6k+1$ 時，$t_n=(n^2-1)/12$；當 $n=6k+2$ 時，$t_n=(n^2-4)/12$；當 $n=6k+3$ 時，$t_n=(n^2+3)/12$；當 $n=6k+4$ 時，$t_n=(n^2-4)/12$；當 $n=6k+5$ 時，$t_n=(n^2-1)/12$.

【參考解答二】：

設 $f(n)$ 是將 n 個相同物分成 A,B,C 相異三組，每一組至少一個的分法數。

設 $g(n)$ 是將 n 個相同物分成三組，每組至少一個的分法數。

若 A,B,C 三組各有 x,y,z 個，則 $x+y+z=n$ 且 x,y,z 為正整數。因此，

$f(n)$ 的值即為方程式 $x+y+z=n$ 的正整數解 (x,y,z) 之個數；

亦即方程式 $x+y+z=n-3$ 的非負整數解 $(x,y,z))$ 之個數；

亦即從 A,B,C 三個相異物可重複取出 $n-3$ 個的取法數。

由此可得：$f(n)=H^3_{n-3}=C^{n-1}_{n-3}=C^{n-1}_2$。

將 $f(n)$ 分成以下三類：

$f_1(n)$ 表示分法中三組個數相同($x=y=zz$)的分法數；

$f_2(n)$ 表示分法中恰有兩組個數相同的分法數；

$f_3(n)$ 表示分法中三組個數都不相同的分法數。

則 $f(n)=C^{n-1}_2=f_1(n)+f_2(n)+f_3(n)$。以下分別計算 $f_1(n), f_2(n), f_3(n))$ 的值：

(I) $f_1(n)=\begin{cases} 1，當 n\equiv 0 \pmod 3 \\ 0，當 n\equiv 1,2 \pmod 3 \end{cases}$。

(II) $f_2(n)=\begin{cases} 3(m-1)，當 n\equiv 0 \pmod 3 \\ 3m，當 n\equiv 1,2 \pmod 3 \end{cases}$，其中 $m=\left[\dfrac{n-1}{2}\right]$，即以下 $3mm$ 組解：

$(1,1,n-2)$，$(1,n-2,1)$，(

$(2,2,n-4)$，$(2,n-4,2)$，(

$(3,3,n-6)$，$(3,n-6,3)$，(

………………… (註：$n\equiv 0 \pmod 3$ 時，有一組三個數相等)

$(m,m,n-2m)$，$(m,n-2m,m)$，$(n-2m,m,m)$。

(III) $f_3(n)=C^{n-1}_2-f_1(n)-f_2(n)=\begin{cases} C^{n-1}_2-3\left[\dfrac{n-1}{2}\right]+2，當 n\equiv 0 \pmod 3 \\ C^{n-1}_2-3\left[\dfrac{n-1}{2}\right]，當 n\equiv 1,2 \pmod 3 \end{cases}$。

因此，

$$g(n)=f_1(n)+\frac{f_2(n)}{3}+\frac{f_3(n)}{3!}$$

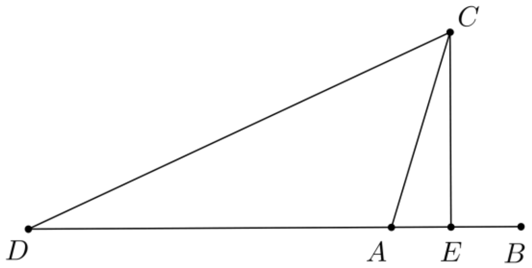
$$=\begin{cases}\dfrac{(n-1)(n-2)}{12}+\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{n-1}{2}\right]+\dfrac{1}{3}, & \text{當 } n\equiv 0 \pmod 3\\ \dfrac{(n-1)(n-2)}{12}+\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{n-1}{2}\right], & \text{當 } n\equiv 1,2 \pmod 3\end{cases}\text{。}$$

特例：

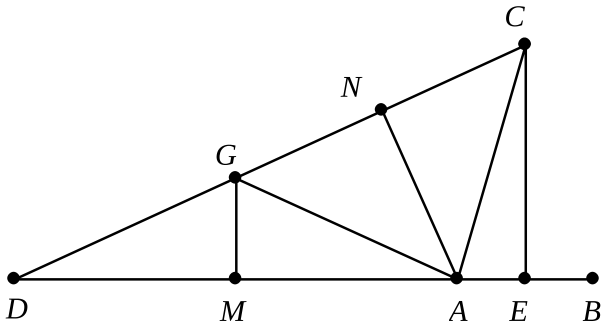
$$g(2014)=\frac{2013\cdot 2012}{12}+\frac{1}{2}\left[\frac{2013}{2}\right]=338016\text{。}$$

問題三： 如圖，點 A 介於點 B 與點 D 之間且 $\overline{CE}$ 與 $\overline{BD}$ 垂直於點 E，設 $\overline{AC}=1$, $\overline{AD}=x$, $\overline{AE}=y$ 。若 $\angle BAC$ 是銳角且 $\angle BAC=3\angle BDC$ 。

試證： $x^3-3x-2y=0$ 。　　(12 分)



【參考解答】：



設 $\angle BDC=\theta$，則 $\angle BAC=3\theta$。在 $\overline{CD}$ 上作點 G 使得 $\overline{AG}=\overline{AC}=1$。又設點 G 至 $\overline{AD}$ 的垂足為 M、點 A 至 $\overline{CD}$ 的垂足為 N。

因為 $\angle BAC=3\angle BDC$ ，所以，在 $\triangle ADC$ 中可得

$$\angle ACD=\angle BAC-\angle BDC=2\theta \text{ 。}$$

設 $\overline{GC}=z$ 。因為 $\overline{AG}=\overline{AC}$ ，所以，$\triangle ACG$ 是等腰三角形。於是，得 $\overline{CN}=\overline{GN}=z/2$ 以及

$$\angle AGC=\angle ACG=\angle ACD=2\theta \text{ 。}$$

其次，在 $\triangle GAD$ 中，因為

$$\angle DAG=\angle AGC-\angle ADG=2\theta-\theta=\theta=\angle ADG \text{ ，}$$

所以，$\triangle GAD$ 是等腰三角形， $\overline{AG}=\overline{DG}$，進一步得 $\overline{DG}=\overline{AC}=1$ 與 $\overline{AM}=\overline{DM}$ 。

因為 $\triangle DGM$、$\triangle DCE$ 與 $\triangle DAN$ 都是直角三角形，而且三個三角形都有一個角等於 $\angle BDC$ ，所以，此三個三角形兩兩相似。由此可得

$$\frac{\overline{DM}}{\overline{DG}}=\frac{\overline{DE}}{\overline{DC}} \text{ ，} \frac{\overline{DM}}{\overline{DG}}=\frac{\overline{DN}}{\overline{DA}} \text{ 。}$$

因為 $\overline{DM}=(1/2)\overline{AD}=x/2$ 、 $\overline{DG}=\overline{AG}=\overline{AC}=1$、 $\overline{DE}=\overline{AD}+\overline{AE}=x+y$ ，

$\overline{DC}=\overline{DG}+\overline{GC}=1+z$ ，$\overline{DN}=\overline{DG}+\overline{GN}=1+(1/2)z$ ，所以，由上述兩式得

$$\frac{x}{2}=\frac{x+y}{1+z}\ ,\qquad \frac{x}{2}=\frac{1+(1/2)z}{x}\ 。$$

由上述後一式可得 $z=x^2-2$，代入上述前一式可得

$$x+(x^3-2x)=2x+2y\ ，$$

$$x^3-3x-2y=0\ 。\ \|$$

【另解】

設 $\angle BDC=\theta$ ，則 $\angle BAC=3\theta$ 。在直角三角形 ΔACE 與 ΔDCE 中，因為

$$\tan 3\theta=\frac{\overline{CE}}{\overline{AE}},\ \ \tan\theta=\frac{\overline{CE}}{\overline{DE}},$$

所以，可知

$$\frac{\overline{DE}}{\overline{AE}}=\frac{\tan 3\theta}{\tan\theta}=\frac{\sin 3\theta\times\cos\theta}{\cos 3\theta\times\sin\theta}\ 。$$

因為 $\overline{AD}=x$ 、 $\overline{AE}=y$ ，所以， $\overline{DE}=\overline{AD}+\overline{AE}=x+y$ 。於是，由上式可得

$$\frac{x+y}{y}=\frac{\sin 3\theta\times\cos\theta}{\cos 3\theta\times\sin\theta}=\frac{\left(3\sin\theta-4\sin^3\theta\right)\times\cos\theta}{\left(4\cos^3\theta-3\cos\theta\right)\times\sin\theta}=\frac{3-4\sin^2\theta}{4\cos^2\theta-3}=\frac{4\cos^2\theta-1}{4\cos^2\theta-3}\ ,$$

$$\frac{x}{y}=\frac{3}{4\cos^2\theta-3}\ ,$$

$$\cos^2\theta=\frac{3x+2y}{4x}\ 。$$

在直角三角形 ΔACE 中，因為 $\overline{AB}=1$，所以， $y=\overline{AE}=\cos 3\theta$ 。於是，可得

$$\begin{aligned}
y^2&=\cos^2 3\theta=\left(4\cos^3\theta-3\cos\theta\right)^2=16\cos^6\theta-24\cos^4\theta+9\cos^2\theta\\
&=\frac{27x^3+54x^2y+36xy^2+8y^3}{4x^3}-\frac{6\left(9x^3+12x^2y+4xy^2\right)}{4x^3}+\frac{9\left(3x^3+2x^2y\right)}{4x^3}\\
&=\frac{\left(27x^3+54x^2y+36xy^2+8y^3\right)-6\left(9x^3+12x^2y+4xy^2\right)+9\left(3x^3+2x^2y\right)}{4x^3}\\
&=\frac{3xy^2+2y^3}{x^3},
\end{aligned}$$

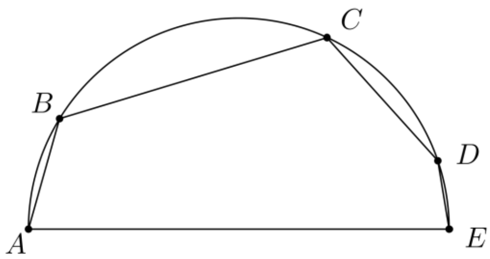
$x^3-3x-2y=0$ 。

問題四： 如圖，A, B, C, D, E 是半徑為 1 的半圓周上之相異點，其中 $\overline{AE}$ 為直徑。

設 $\overline{AB}=a$，$\overline{BC}=b$，$\overline{CD}=c$，$\overline{DE}=d$ 。

試證：$a^2+b^2+c^2+d^2+abc+bcd<4$ 。

(13 分)



【參考解答】 首先，連 $\overline{AC}$ 和 $\overline{CE}$，並設

$$\overline{AC}=m,\ \overline{CE}=n,\ \angle CAE=\alpha,\ \angle CEA=\beta.$$

由餘弦定理可知 $m^2=a^2+b^2-2ab\cos B$. 又因為 $ABCE$ 為一共圓四邊形，所以 $\angle B+\angle\beta=180^\circ$，亦即 $\cos B=-\cos\beta$，故得到

$$a^2+b^2=m^2-2ab\cos\beta,$$

同理可得到

$$c^2+d^2=n^2-2cd\cos\alpha.$$

綜合上述兩式可推得

$$\begin{aligned}&a^2+b^2+c^2+d^2+abc+bcd-4\\&=m^2-2ab\cos\beta+n^2-2cd\cos\alpha+abc+bcd-4\\&=\left(m^2+n^2-4\right)+ab\left(c-2\cos\beta\right)+cd\left(b-2\cos\alpha\right)\end{aligned}$$

另一方面，ΔACE 為直角三角形，則有

$$\begin{cases}m^2+n^2=\overline{AE}^2=4\\ \cos\beta=\dfrac{n}{\overline{AE}}=\dfrac{n}{2}\\ \cos\alpha=\dfrac{m}{\overline{AE}}=\dfrac{m}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m^2+n^2-4=0\\ n=2\cos\beta\\ m=2\cos\alpha\end{cases}$$

將此三式代入上述得到

$$\begin{aligned}&a^2+b^2+c^2+d^2+abc+bcd-4\\&=\left(m^2+n^2-4\right)+ab\left(c-2\cos\beta\right)+cd\left(b-2\cos\alpha\right)\\&=0+ab\left(c-n\right)+cd\left(b-m\right)\\&<0\end{aligned}$$

其中不等式成立是因為 BC 弧小於 AC 弧，則 $b<m$; CD 弧小於 CE 弧，則 $c<n$. 由上，得證 $a^2+b^2+c^2+d^2+abc+bcd<4$.