

臺北市 103 學年度  
普通型高級中等學校數學及自然學科能力競賽

數學科口試試題

編號：\_\_\_\_\_（學生自填）

注意事項：

1. 本口試卷共 2 大題，思考時間 15 分鐘；參賽者可先在本試卷上作答，口試時請攜帶本試卷應試，口試答辯時間 15 分鐘，並繳回本試卷。
2. 本項測驗著重解題技巧、表達能力與邏輯思維，請不必太專注於計算的過程。

【試題一】當三正整數  $a, b, c$  滿足  $a^2 + b^2 = c^2$  時，稱  $a, b, c$  為一組畢氏三元數；又當  $a, b, c$  為一組畢氏三元數且其最大公因數為 1，則稱  $a, b, c$  為一組本原畢氏三元數。

(1) 當  $a, b, c$  為本原畢氏三元數，已知存在二正整數  $m > n$ ，使得

$$(a, b) = (m^2 - n^2, 2mn) \text{ 或 } (2mn, m^2 - n^2) \text{ 而 } c = m^2 + n^2。$$

試解說此時  $m, n$  互質且其奇偶性相反。

(2) 當  $a, b, c$  為任一組畢氏三元數，是否存在二正整數  $p, q$  且  $p > q$  使得

$$(a, b) = (p^2 - q^2, 2pq) \text{ 或 } (2pq, p^2 - q^2), c = p^2 + q^2?$$

【試題二】 $\triangle ABC$  中， $\angle B$  與  $\angle C$  為其二內角。點  $E$  在射線  $\overrightarrow{CA}$  上且  $\overline{BE}$  平分  $\angle B$  的一個外角；點  $F$  在射線  $\overrightarrow{BA}$  上且  $\overline{CF}$  平分  $\angle C$  的一個外角。

試證：若  $\angle B < \angle C$ ，則  $\overline{BE} > \overline{CF}$ 。