103 學年度高級中學數學科能力競賽複賽試題

南區（台南區） 筆試（一）{參考解答}

一、設 n 是大於 1 的正整數且使得 $(31.5)^n+(32.5)^n$ 為正整數，求所有 n 的可能值為何？

【參考解答】$(31.5)^n+(32.5)^n=\dfrac{1}{2^n}(63^n+65^n)$

(i) n 為偶數，則 $63^n+65^n\equiv(-1)^n+1^n\equiv 2 \pmod 4$

故 $63^n+65^n=4m+2=2(2m+1)$，$m\in N$

因此 $(31.5)^n+(32.5)^n$ 非為整數

(ii) n 為奇數，則 $63^n+65^n=(63+65)(63^{n-1}+63^{n-2}\cdot 65+\cdots+65^{n-1})$

又 $63^{n-1}+63^{n-2}\cdot 65+\cdots+65^{n-1}$，共有 n 項且每一項皆為奇數，

故 $63^n+65^n=128\times$ 奇數

所以 $n=3, 5, 7$

二、已知 x_1、x_2、⋯、x_{2014} 和 y_1、y_2、⋯、y_{2014} 均是正數，

且滿足 $\sum_{i=1}^{2014} x_i \le 1$ 和 $\sum_{i=1}^{2014} y_i \le 2014$。

求證 $(x_1+y_1)(x_2+y_2)\cdots(x_{2014}+y_{2014}) \ge 2015^{2014} x_1x_2\cdots x_{2014}y_1y_2\cdots y_{2014}$

【參考解答】:
由算幾不等式可得

$$x_1x_2\cdots x_{2014} \le \left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{2014}}{2014}\right)^{2014} \le \frac{1}{2014^{2014}} \qquad \cdots\cdots\cdots(1)$$

$$y_1y_2\cdots y_{2014} \le \left(\frac{y_1+y_2+\cdots+y_{2014}}{2014}\right)^{2014} \le 1 \qquad \cdots\cdots\cdots(2)$$

對任意自然數 $1 \le i \le 2014$，

$$\frac{1}{x_i}+\frac{1}{y_i} = \underbrace{\frac{1}{2014x_i}+\frac{1}{2014x_i}+\cdots+\frac{1}{2014x_i}}_{2014\text{個}}+\frac{1}{y_i}$$

$$\ge 2015\sqrt[2015]{\left(\frac{1}{2014x_i}\right)^{2014}\left(\frac{1}{y_i}\right)}$$

故由(1)式、(2)式與上式可推得

$$\prod_{i=1}^{2014}\left(\frac{1}{x_i}+\frac{1}{y_i}\right) \ge (2015)^{2014}\sqrt[2015]{\frac{1}{\left(2014^{2014}\right)^{2014}}\left(\frac{1}{x_1x_2\cdots x_{2014}}\right)^{2014}\frac{1}{y_1y_2\cdots y_{2014}}}$$

$$\ge (2015)^{2014}\sqrt[2015]{\frac{1}{\left(2014^{2014}\right)^{2014}}\times\left(2014^{2014}\right)^{2014}\times 1} = (2015)^{2014}$$

上式經整理可得

$$(x_1+y_1)(x_2+y_2)\cdots(x_{2014}+y_{2014}) \ge 2015^{2014} x_1x_2\cdots x_{2014}y_1y_2\cdots y_{2014}$$

三、. 設函數 $f: R \to R$ 滿足下列三條件：

(1) $f(0) = 2014$，

(2) 對任意 $x \in R$， $f(x+2) - f(x) \le 8 \cdot 3^x$，

(3) 對任意 $x \in R$， $f(x+6) - f(x) \ge 728 \cdot 3^x$.

試求 $f(2014)$ 之值。

【參考解答】:

令 $g(x) = f(x) - 3^x$ ，其中 $x \in R$

則對任意 $x \in R$，我們有

$$g(x+2) - g(x) = f(x+2) - f(x) - 3^{x+2} + 3^x \le 8 \cdot 3^x - 8 \cdot 3^x = 0,$$

且

$$g(x+6) - g(x) = f(x+6) - f(x) - 3^{x+6} + 3^x \ge 728 \cdot 3^x - 728 \cdot 3^x = 0,$$

所以對任意 $x \in R$， $g(x+2) \le g(x)$ 且 $g(x+6) \ge g(x)$

由此可推導出對任意 $x \in R$，

$$g(x) \le g(x+6) \le g(x+4) \le g(x+2) \le g(x)$$

$$\Rightarrow \quad g(x) = g(x+2) = g(x+4) = g(x+6)$$

故知 $g(x)$ 是一個周期為 2 的周期函數

所以 $f(2014) = g(2014) + 3^{2014} = g(0) + 3^{2014} = f(0) - 1 + 3^{2014} = 3^{2014} + 2013$

四、一組等差為 5 的 402 個數 9, 14, 19, …,2014。證明從這些數中任選出 205 個數，必定會至少有 6 個數 a,b,c,d,e,f ，使得 $a+b=c+d=e+f=2028$ 。

【參考解答】型式為 $5n+4, n=1,\cdots,402$

將這些數去掉 9 及 1014 後，可分成 200 組

$\{14,2014\},\{19,2009\},\cdots,\{1009,1019\}$

任取 205 個數，則至少會有 203 個數會從這 200 組數中選取，

因此會有兩個數 a,b 從同一組中選出，使得 $a+b=2028$

此時則剩 199 組選出 201 個數，同上理由，以此類推，

最後可證得必定至少會有 6 個數 a,b,c,d,e,f ，使得

$a+b=c+d=e+f=2028$ 。