

103 學年度高級中學數學科能力競賽複賽試題

南區（台南區） 口試題

若兩正數 α 和 β 滿足 $\log_9 \alpha = \log_{12} \beta = \log_{16}(\alpha + \beta)$ ，試求 $\log_5 \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta}$ 之值。

【參考解答】：

$$\text{令 } t = \log_9 \alpha = \log_{12} \beta = \log_{16}(\alpha + \beta)$$

$$\text{所以 } \begin{cases} \alpha = 9^t \\ \beta = 12^t \\ \alpha + \beta = 16^t = 9^t + 12^t \end{cases}$$

$$\text{同除 } 9^t \text{ 得 } \left(\frac{16}{9}\right)^t = 1 + \left(\frac{12}{9}\right)^t = 1 + \frac{\beta}{\alpha}$$

$$\text{又 } \left(\frac{16}{9}\right)^t = \left(\frac{4}{3}\right)^{2t} = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2$$

$$\text{令 } x = \frac{\beta}{\alpha} \text{ 可得 } x^2 = 1 + x$$

$$\text{因 } x > 0 \text{ 解之得 } \frac{\beta}{\alpha} = x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad \Rightarrow \frac{\alpha}{\beta} = \frac{2}{1 + \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

$$\text{所以 } \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} = \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta} = \sqrt{5}$$

$$\text{故 } \log_5 \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} = \frac{1}{2}$$

口試題

設 a_1, a_2, \dots, a_n ($n \geq 3$) 均為正實數，求 $\sum_{i=1}^n \left[\frac{a_{i+1} + 4a_{i-1}}{2a_i} \right]$ 的最小值為何？

(式子中令 $a_0 = a_n$ 且 $a_{n+1} = a_1$ ；符號 $[x]$ 為不大於 x 的最大整數)。

【參考解答】 $x-1 < [x]$

$$\text{所以 } \sum_{i=1}^n \left[\frac{a_{i+1} + 4a_{i-1}}{2a_i} \right] > \sum_{i=1}^n \frac{a_{i+1} + 4a_{i-1}}{2a_i} - n \geq 2n - n = n$$

故最小值為 $n+1$

$$\begin{aligned} \text{因為 } & \frac{a_2 + 4a_n}{2a_1} + \frac{a_3 + 4a_1}{2a_2} + \frac{a_4 + 4a_2}{2a_3} + \dots + \frac{a_n + 4a_{n-2}}{2a_{n-1}} + \frac{a_1 + 4a_{n-1}}{2a_n} \\ &= \left(\frac{a_2}{2a_1} + \frac{2a_n}{a_1} \right) + \left(\frac{a_3}{2a_2} + \frac{2a_1}{a_2} \right) + \left(\frac{a_4}{2a_3} + \frac{2a_2}{a_3} \right) + \dots + \left(\frac{a_{n-2}}{2a_{n-1}} + \frac{2a_{n-3}}{a_{n-2}} \right) + \left(\frac{a_1}{2a_n} + \frac{2a_{n-1}}{a_n} \right) \\ &\geq 2 + 2 + \dots + 2 = 2n \end{aligned}$$