

103 學年度台灣省北二區（新竹高中）

普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽

數學科筆試（一）試題

編號：_____（學生自填）

注意事項：

1. 本試卷共三題計算證明題，滿分為 49 分。
2. 考試時間：2 小時。
3. 試題及計算紙必須連同答案卷交回。
4. 將演算過程依序填寫在答案卷內。

問題一：已知 E 、 F 、 G 、 H 分別為正方形 $ABCD$ 四邊 \overline{AB} 、 \overline{BC} 、 \overline{CD} 、 \overline{DA} 上的點。

(1) 若 $\overline{EG} \perp \overline{FH}$ ，試證 $\overline{EG} = \overline{FH}$ 。 (10 分)

(2) 若僅給定 E 、 F 、 G 、 H 四點，試以尺規作圖作出此正方形 $ABCD$ （寫出作法並證明之）。 (6 分)

問題二：設實數 $a, b, c \geq 0$ 且滿足 $a + b + c = 1$ ，試證： $ab + bc + ca - 2abc \leq \frac{7}{27}$ 。

(16 分)

問題三：將一圓用 n 條直徑等分成 $2n$ 個扇形，任選其中 n 個塗紅色，另 n 個塗藍色。將紅色扇形與藍色扇形分別編號如下：紅色扇形從某一個起依順時針順序寫上 $1, 2, \dots, n$ ，藍色扇形從某一個起依逆時針順序寫上 $1, 2, \dots, n$ 。證明存在一個半圓，出現 $1, 2, \dots, n$ 的每一個數。 (17 分)