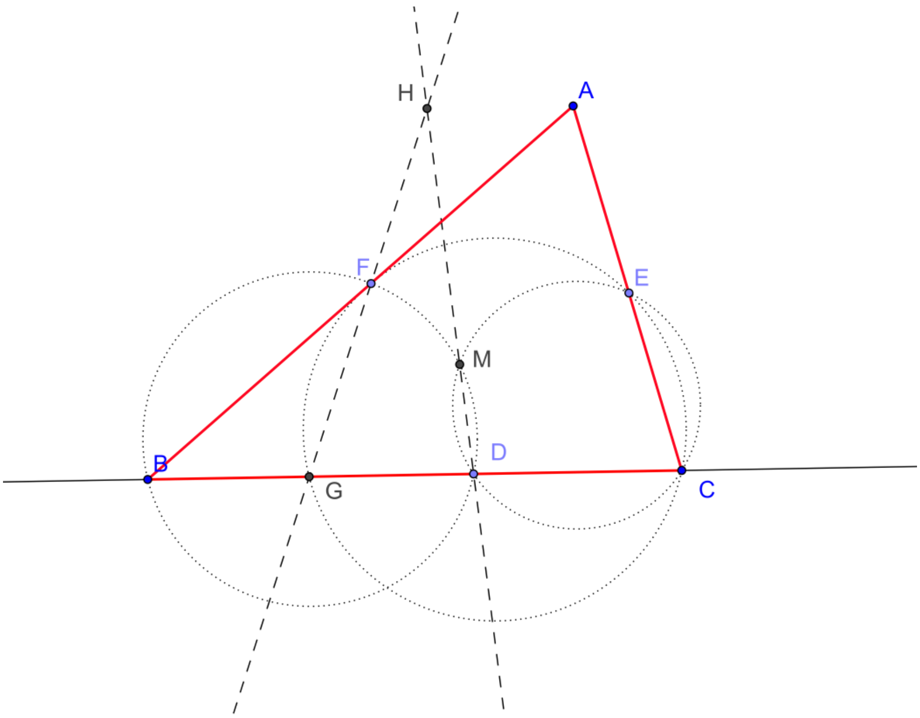
103 學年度台灣省北二區（新竹高中）

普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽

數學科口試試題 參考答案

【試題一】

在 ΔABC 中，D、E、F 分別為三邊 BC、CA、AB 上的任意點，設 ΔBDF 和 ΔCED 的外接圓交於 D 和 M 兩點，且 ΔCEF 的外接圓交直線 BC 於 G 點。作直線 MD 和直線 FG，設兩直線交於一點 H。試證 A、E、M、F、H 五點共圓。



【證明】

1. 作線段 EM 和 FM，因 E、C、D、M 四點共圓且 M、D、B、F 四點共圓，則 $\angle MEC = \angle MDB = \angle MFA$，故 A、E、M、F 四點共圓。
2. 作直線 EF 交直線 MD 於點 I，因 C、G、F、E 四點共圓且 E、C、D、M 四點共圓，則 $\angle HFI = \angle C = \angle IME$，且 ΔHFI 和 ΔEMI 相似，所以 E、M、F、H 四點共圓。
3. 由步驟 1,2 得 A、E、M、F、H 五點共圓。

【試題二】

形如 $2^{2^n}+1, n=0,1,\cdots$的數稱為費馬數。試證明費馬數不可能是完全立方數。

【證明】

用反證法。設 $2^{2^n}+1=k^3$，則 k 必為奇數。分解因式有

$$2^{2^n}=k^3-1=(k-1)(k^2+k+1),$$

因此 $k-1=2^s$，$k^2+k+1=2^t$，其中 s,t 為正整數。由此有

$$2^{2s}=(k-1)^2=k^2-2k-1,$$

故 $2^t-2^{2s}=3k$，但此式矛盾，因為等號左邊為偶數，右邊為奇數。故得證。