新北市 103 學年度
高級中學數理及資訊學科能力競賽
數學科筆試(二)試題 參考答案

編號：_____________(學生自填)

注意事項：

1. 本試卷共七題填充題，每題 3 分，滿分為 21 分。
2. 考試時間：1 小時。
3. 試題及計算紙必須連同答案卷交回。
4. 將答案填寫在答案欄內。

1. 使得多項式 $f(x)=x^4-5x^3+3x^2+19x-30<0$ 的 x 範圍為____(一)____。

【參考解答】$-2<x<3$

經觀察可將 $f(x)$ 做因式分解得 $f(x)=(x^2-4x+5)(x^2-x-6)$，因 x^2-4x+5 恆為正，

可知 $f(x)$ 之正負號與 x^2-x-6 相同，得知當 $-2<x<3$ 時，$f(x)<0$。

2. 已知 a、b、c、d 為正整數滿足 $\log_a b=\frac{3}{2}$，$\log_c d=\frac{5}{4}$。若 $a-c=9$，則 $b+d=$____(二)____。

【參考解答】157

由已知條件可得 $a^{\frac{3}{2}}=b$，$c^{\frac{5}{4}}=d$ $\Rightarrow$ $1\le a=(\frac{b}{a})^2$，$1\le c=(\frac{d}{c})^4$ $\Rightarrow$ $a\le b$，$c\le d$。因為 $a-c=9$ $\Rightarrow$ $(\frac{b}{a})^2-(\frac{d}{c})^4=9$ $\Rightarrow$ $(\frac{b}{a}+\frac{d^2}{c^2})(\frac{b}{a}-\frac{d^2}{c^2})=9$

由於 $(\frac{b}{a}+\frac{d^2}{c^2})\ge 2$，所以 $(\frac{b}{a}+\frac{d^2}{c^2})=9$，$(\frac{b}{a}-\frac{d^2}{c^2})=1$。因此 $\frac{b}{a}=5$，$\frac{d^2}{c^2}=4$ $\Rightarrow$ $a=25$，$b=125$，$c=16$，$d=32$ $\Rightarrow$ $b+d=125+32=157$。

3. 滿足 $m+(m+1)+(m+2)+\cdots+(n-1)+n=mn$ （$50<m<n<300$）的正整數數對 $(m,n)=$____(三)____。

【參考解答】(85,204)

由條件可知我們欲求的正整數數對 (m,n) 應滿足

$$\frac{n(n+1)}{2}-\frac{m(m-1)}{2}=mn$$

$$\Leftrightarrow \quad m^2+(2n-1)m+(-n^2-n)=0 \text{。} \qquad (1)$$

因為 m 為正整數，所以存在正整數 i 使得

$$(2n-1)^2-4(-n^2-n)=i^2\text{，即 } 8n^2+1=i^2 \text{。}$$

滿足上式的前幾個正整數 n 為 1, 6, 35, 204, 1189, $\cdots$ 。將它們代入方程式(1)可得 m 為 1, 3, 15, 85, 493, $\cdots$ 。由於 $50<m<n<300$，所以符合所求的正整數數對 (m,n) 只有 $(m,n)=(85,204)$。

4. 平面上給定線段 $\overline{AB}=16$。對平面上的點 P，令 $a(P)$ 表示 ΔABP 的面積，$b(P)$ 表示 ΔABP 的周長，則滿足 $a(P)\in\{100,110,120\}$ 且 $b(P)=50$ 的點 P 共有____(四)____個。

【參考解答】10

令 $A(-8,0),B(8,0)$。由 $b(P)=50$ 表示 $\overline{AP}+\overline{BP}=34$，即點 P 在橢圓 $\frac{x^2}{17^2}+\frac{y^2}{15^2}=1$ 上。

又 $a(P)\in\{100,110,120\}$，可知點 P 必須在以下某一水平直線上：

$$y=\pm\frac{100}{8},\quad y=\pm\frac{110}{8},\quad y=\pm\frac{120}{8}=\pm15$$

這些水平直線與橢圓 $\frac{x^2}{17^2}+\frac{y^2}{15^2}=1$ 分別有 2,2,2,2,1,1 個交點；故共有 10 點 P。

5. 已知從 9 個正數 1, 1, 3, 5, 7, 9, 9, 22, x 中，任意取出 4 數之和的數學期望值為 $\frac{100}{3}$，則 x 之值為____(五)____。

【參考解答】18

由 $1+1+3+5+7+9+9+22+x=57+x$，得知任意取出 4 數的和之數學期望值為 $\frac{C_3^8\cdot(57+x)}{C_4^9}=\frac{100}{3}$；故得 $x=18$。

6. 對任意有限集合 X ，函數 $f(X)$ 定義為 X 內最大的數，減第二大的數，加第三大的數，減第四大的數，…，依此類推。例如： $f(\{3,6,10,12,1\})=12-10+6-3+1=6$ 。令集合 $U=\{1,2,3,...,103\}$。則 U 的所有非空子集合 X 的 $f(X)$ 之值的和為__(六)__ 。

【參考解答】 103×2^{102}

所有在沒有 103 的集合 X 中出現的數，在 $X\cup\{103\}$ 中，其正負號剛好相反，所以抵消。因此我們只要考慮 103 這個數被算幾次即可，而有 103 的集合恰有 2^{102} 個，所以答案為 103×2^{102} 。

7. 對所有的正整數 n ，定義

$$S(n)=1+11+\cdots+\underbrace{11...1}_{n} \qquad \text{(最後一項有 } n \text{ 個 1)}$$

例如： $S(1)=1$ ， $S(2)=1+11=12$

使得 $S(n)$ 是 45 的倍數的最小正整數 $n=$____(七)____ 。

【參考解答】35

易知 $S(n)$ 被 5 整除的充要條件是 n 是 5 的倍數。又由除以 9 所得餘數的規則，知道 $S(n)$ 除以 9 的餘數(由 $n=1$ 開始)依序為

$$1, 3, 6, 1, 6, 3, 1, 0, 0, \ldots$$

以下每 9 項循環一次。所以 $S(n)$ 被 9 整除的充要條件是 $n\equiv 0, 8 \pmod 9$。綜上所述，使得 $S(n)$ 為 45 的倍數的最小正整數 $n=35$ 。

□