

**新北市 103 學年度
高級中學數理及資訊學科能力競賽
數學科筆試(一)試題**

編號：_____ (學生自填)

注意事項：

1. 本試卷共四題計算證明題，滿分 49 分。
2. 考試時間：2 小時。
3. 試題及計算紙必須連同答案卷交回。
4. 將過程填寫在答案卷內。

【問題一】

證明：對任意正實數 a, b, c ，不等式

$$\sqrt{a^2 + b^2 - \sqrt{3}ab} + \sqrt{b^2 + c^2 - bc} + \sqrt{c^2 + a^2 - \sqrt{3}ca} \geq \sqrt{3}a$$

恆成立，並給出等號成立的充要條件。

(12 分)

【問題二】

假設 A 為一個三位數，且 A 的百位數、十位數、與個位數分別為 a, b, c ，且方程式

$ax^2 + bx + c = 0$ 有有理根，證明 A 不是質數。

(12 分)

<背面尚有試題>

【問題三】

若正有理數 m 可以表成 $m = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c$ ，其中 a, b, c 為整數，則稱 m 為金元數。試問從集合 $S = \left\{ \frac{k}{30^r} \mid k, r \text{ 為正整數} \right\}$ 中最多可以找出幾個不同元素，使得這些元素中相異兩數 p, q 都滿足 $|p - q|$ 為金元數？

(12 分)

【問題四】

$\triangle ABC$ 中 $\overline{AB} = \overline{AC} = 5$ ， $\overline{BC} = 6$ ，而 D 為 \overline{AC} 上的一點。設 P 為 \overline{BD} 上的一點使得 $\angle APC = 90^\circ$ ，且 $\angle ABP = \angle BCP$ ，如圖所示。求 $\frac{\overline{DC}}{\overline{AD}}$ 之值？

(13 分)

