

## 新北市數學能力競賽-口試 參考答案

### 【問題一】

設  $a, b, c$  為兩兩相異的實數。證明：下列的三個二次方程式

$$(x-a)(x-b) = x-c$$

$$(x-b)(x-c) = x-a$$

$$(x-c)(x-a) = x-b$$

之中，至少兩個方程式有實根。

### 【參考解答】

由對稱性，不妨設  $a < b < c$ 。

令  $f_1(x), f_2(x), f_3(x)$  分別代表三條式子的左式減右式所得的二次式。易知道三條方程式的最高次項係數皆為 1。由於  $f_3(b) = (b-c)(b-a) < 0$ ，故  $f_3(x) = 0$  確定有實根。接下來只要證明第一式、第二式之間至少有一式有實根即可。 $f_1(x) = 0$  的判別式可寫為

$$\begin{aligned} (-a-b-1)^2 - 4(ab+c) &= a^2 + b^2 + 2ab + 2a + 2b + 1 - 4ab - 4c \\ &= a^2 + b^2 - 2ab + 2a + 2b + 1 - 4c \\ &= (a-b-1)^2 + 4a - 4c \end{aligned} \tag{1}$$

同理， $f_2(x) = 0$  的判別式可寫成

$$(-b-c-1)^2 - 4(bc+a) = (c-b-1)^2 + 4c - 4a > 0 \tag{2}$$

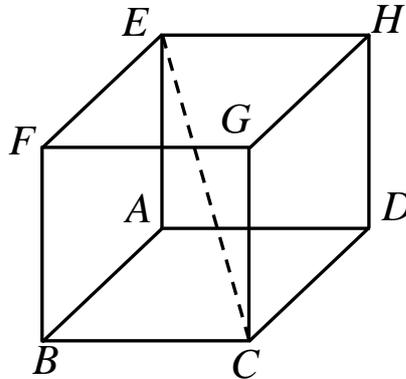
故  $f_2(x) = 0$  也有兩個實根。證畢。

註：代入可得  $f_2(c) < 0$ ，所以原命題也可由勘根定理得證。

□

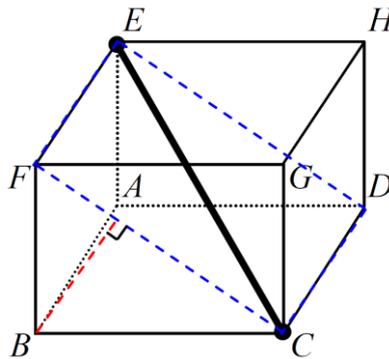
【問題二】

如圖，長方體  $ABCDEFGH$  中，對角線  $\overline{CE}$  與不相鄰邊之距離分別為  $2\sqrt{5}$ ,  $\frac{30}{\sqrt{13}}$ ,  $\frac{15}{\sqrt{10}}$ ，求此長方體體積。



【參考解答】

設  $\overline{AB} = a$ ， $\overline{AD} = b$ ， $\overline{AE} = c$ 。



如圖， $\overline{AB}$  邊與對角線  $\overline{EC}$  的距離，等於點  $B$  到  $\overline{CF}$  的距離  $\frac{bc}{\sqrt{b^2+c^2}} = 2\sqrt{5}$ 。

同理， $\overline{AD}$  邊與對角線  $\overline{EC}$  的距離，等於  $\frac{ac}{\sqrt{a^2+c^2}} = \frac{30}{\sqrt{13}}$ 。

$\overline{FB}$  邊與對角線  $\overline{EC}$  的距離，等於  $\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{15}{\sqrt{10}}$ 。

解得  $a = 15$ ， $b = 5$ ， $c = 10$ ，所以體積為 750。