103 學年度北一區（花蓮高中）
普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽
數學科筆試（一）試題

編號：________________（學生自填）

注意事項：

1. 本試卷共四題計算證明題，滿分為 46 分。
2. 考試時間：2 小時。
3. 試題及計算紙必須連同答案卷交回。
4. 將演算過程依序填寫在答案卷內。

問題一： 袋中有黑、白球各一顆，每次從袋中任取一球，取出的球不放回，但再放進一顆黑球，令 a_n 為第 n 次取到黑球的機率。

(1) 寫出 a_n 的遞迴關係式。（ 5 分）

(2) 求 a_n 的一般式。（ 6 分）

a_n 的遞迴關係式為 $a_n = \frac{1}{2}a_{n-1} + \frac{1}{2}\times 1$，此式代表第 $n-1$ 次抽到黑衣球，加上第 $n-1$ 次抽到白球，兩者機率和即為第 n 次抽到黑球的機率，解遞迴:

原式=> $a_n - 1 = \frac{1}{2}(a_{n-1} - 1)$

令 $b_n = a_n - 1$

$$\therefore \begin{cases} b_n = \frac{1}{2} b_{n-1} \\ \vdots \\ b_2 = \frac{1}{2} b_1 \end{cases} \quad \text{相乘} \quad \Rightarrow \quad b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} b_1$$

$$\because a_1 = \frac{1}{2}$$

$$\therefore a_{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot \left(\frac{1}{2} - 1\right)$$

$$\therefore a_n = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

(1) $a_n = \frac{1}{2} a_{n-1} + \frac{1}{2}$

(2) $a_n = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$

問題二： 已知四面體 $EFGH$ 的每個面都是邊長為 1 的正三角形，

（1） 求兩向量 $\overrightarrow{EF}$ 與 $\overrightarrow{GH}$ 的夾角為多少度？ （ 5 分）

（2） 求兩直線 EF 與 GH 的距離為何？ （ 6 分）

【解答】：

(1) $\cos\theta = \dfrac{\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{GH}}{\left|\overrightarrow{EF}\right|\left|\overrightarrow{GH}\right|}$

$$= \frac{\overrightarrow{EF} \cdot \left(\overrightarrow{EH} - \overrightarrow{EG}\right)}{1 \times 1}$$

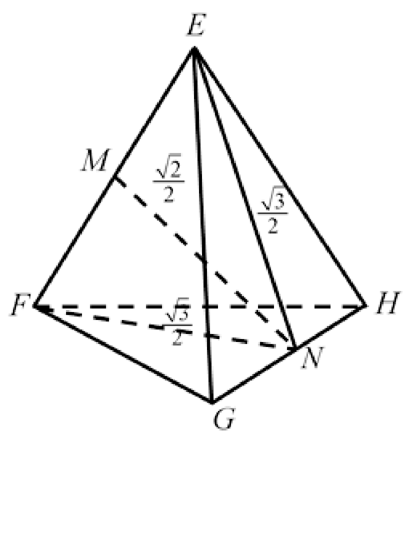
$$(\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{EH} = 1 \times 1 \times \frac{1^2 + 1^2 - 1^2}{2 \times 1 \times 1} = \frac{1}{2})$$

$$(\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{EG} = 1 \times 1 \times \frac{1^2 + 1^2 - 1^2}{2 \times 1 \times 1} = \frac{1}{2})$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}$$

$$= 0$$

$$\therefore \theta = 90^\circ$$



(2) 取$\overline{EF}$、$\overline{GH}$之中點M、N

1. 在$\triangle FNE$中，$\overline{EN}=\overline{FN}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$為等腰三角形

   $\therefore \overline{MN}\perp\overline{FE}$

2. 同理可知$\overline{MN}\perp\overline{GH}$

3. $\therefore \overline{MN}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$為$\overline{EF}$至$\overline{GH}$之最短距離

問題三： 證明：$1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}+\cdots+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdots\dfrac{2n-1}{2n}<\sqrt{2n+1}$

（ 12 分）

【證明】：

用數學歸納法：

$n=1$：左$=1+\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$，右$<\sqrt{3}$，左$<$右

設$n=k$時，不等式成立，則$n=k+1$時，

左$=1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdots\dfrac{2k-1}{2k}+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdots\dfrac{2k+1}{2k+2}<\sqrt{2k+1}+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdots\dfrac{2k+1}{2k+2}$

要證$\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdots\dfrac{2k+1}{2k+2}<\sqrt{2k+3}-\sqrt{2k+1}$

令$x=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdots\dfrac{2k+1}{2k+2}$

$y=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{4}{5}\cdots\dfrac{2k+2}{2k+3}$

則$xy=\dfrac{1}{2k+3}$且$x<y$

因此$x^2<xy=\dfrac{1}{2k+3}$，$x<\dfrac{1}{\sqrt{2k+3}}<\dfrac{2}{\sqrt{2k+3}+\sqrt{2k+1}}=\sqrt{2k+3}-\sqrt{2k+1}$

故左$<\sqrt{2k+1}+\left(\sqrt{2k+3}-\sqrt{2k+1}\right)=\sqrt{2k+3}=$右

問題四： 在 $1,2,3,\ldots,2014$ 中取一組數，使任意兩數的和不能被其差整除，則最多能取多少個數？

（ 12 分）

【解答】：

將 $1,2,3,\ldots,2014$ 分成 $(1,2,3),(4,5,6),\ldots,(2011,2012,2013),(2014)$ 共 672 組。若至少取 673 個數，則根據鴿籠原理，必有 2 數在同一組。不妨設此兩數為 a,b 且 $a>b$ ，則 $a-b=1$ 或 2 。

當 $a-b=1$ ，顯然 $a-b|a+b$ 不合。當 $a-b=2$ ，則 a,b 同奇偶，此時 $a+b$ 為偶數，同樣有 $a-b|a+b$ 亦不合。故最多取 672 個數。

取 $1,4,7,\ldots,2011,2014$ 共 672 個數，則任兩數的差為 3 的倍數，任兩數的和被 3 除餘 2，因此任兩數和不能被其差整除