

103 學年度北一區（花蓮高中）  
普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽  
數學科筆試（一）試題

編號：\_\_\_\_\_（學生自填）

**注意事項：**

1. 本試卷共四題計算證明題，滿分為 46 分。
2. 考試時間：2 小時。
3. 試題及計算紙必須連同答案卷交回。
4. 將演算過程依序填寫在答案卷內。

**問題一：**袋中有黑、白球各一顆，每次從袋中任取一球，取出的球不放回，但再

放進一顆黑球，令  $a_n$  為第  $n$  次取到黑球的機率。

- (1) 寫出  $a_n$  的遞迴關係式。 （ 5 分）
- (2) 求  $a_n$  的一般式。 （ 6 分）

《背面尚有試題》

**問題二：**已知四面體  $EFGH$  的每個面都是邊長為 1 的正三角形，求

(1) 兩向量  $\overline{EF}$  與  $\overline{GH}$  的夾角為多少度？ (5 分)

(2) 兩直線  $EF$  與  $GH$  的距離為何？ (6 分)

**問題三：**對任何正整數  $n$ ，證明不等式：

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} + \dots + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \dots \frac{2n-1}{2n} < \sqrt{2n+1}$$

恆成立。

(12 分)

**問題四：**在  $1, 2, 3, \dots, 2014$  中取一組數，使任意兩數的和不能被其差整除。問：

最多能取多少個數？

(12 分)

《試題結束》