103 學年度高雄市高級中學數學科能力競賽試題（二）

參考解答

1. 設 $P(x)$ 為一個整係數多項式，若 $P(3)$ 與 $P(4)$ 都是 12 的倍數，試證: $P(7)$ 同樣也是 12 的倍數。

【參考解答】可設 $P(x)=Q_1(x)(x-3)+P(3)=Q_2(x)(x-4)+P(4)$，其中 $Q_1(x)$ 與 $Q_2(x)$ 皆為整係數多項式。

可得出 $P(7)=4Q_1(7)+P(3)=3Q_2(7)+P(4)$。

其中 $4Q_1(7)+P(3)$ 是 4 的倍數，而 $3Q_2(7)+P(4)$ 則是 3 的倍數。

故 $P(7)=4Q_1(7)+P(3)=3Q_2(7)+P(4)$ 為 12 的倍數。

2. 設 α 為實數，且 $\sin\alpha+\cos\alpha=-1$，對任意正整數 n，試證:

$\sin^n\alpha+\cos^n\alpha=(-1)^n$。

【參考解答】 設 $\sin\alpha=-\frac{1}{2}-d,\ \cos\alpha=-\frac{1}{2}+d$。 則

$$1=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=\left(-\frac{1}{2}-d\right)^2+\left(-\frac{1}{2}+d\right)^2 \Rightarrow d=\pm\frac{1}{2}$$

所以 $\sin\alpha=-1$ 且 $\cos\alpha=0$ 或 $\sin\alpha=0$ 且 $\cos\alpha=-1$，故得證。

3. 已知 $2x+y+2=0$，試求 $\log_2\left(\frac{y}{x^2}\right)$ 的最大值。

【參考解答】由於 $y=\log_2 x$ 是遞增函數，故當 $\frac{y}{x^2}$ 最大時，$\log_2\left(\frac{y}{x^2}\right)$ 才最大。 令 $k=\frac{y}{x^2}$ $(k>0)$，即 $y=kx^2$。

因所求的點須滿足方程組：$\begin{cases}2x+y+2=0\\ y=kx^2\end{cases}$，即 $kx^2+2x+2=0$。 此外，欲使得 $\frac{y}{x^2}$ 最大，則直線 $2x+y+2=0$ 將與拋物線 $y=kx^2$ 相切，即方程式 $kx^2+2x+2=0$ 有兩相同實根。 令判別式 $\Delta=4-8k=0$

得 $k=\dfrac{1}{2}$。所以，$\dfrac{y}{x^2}$ 最大值為 $\dfrac{1}{2}$ 時，$\log_2\left(\dfrac{y}{x^2}\right)$ 的最大值為 -1。

4. 設 α，β 為正整數，且 $\dfrac{52}{303}<\dfrac{\alpha}{\beta}<\dfrac{16}{91}$，試求當 β 為最小時，則 $\dfrac{\alpha}{\beta}$ 的值為何。

【參考解答】

$$\frac{52}{303}<\frac{\alpha}{\beta}<\frac{16}{91}\Leftrightarrow\frac{91}{16}<\frac{\beta}{\alpha}<\frac{303}{52}$$

$$\Leftrightarrow 5+\frac{11}{16}<\frac{\beta}{\alpha}<5+\frac{43}{52}\quad \therefore\frac{\beta}{\alpha}>5 \text{ 且 } \frac{\beta}{\alpha}<6 \ \Leftrightarrow\ 5\alpha<\beta<6\alpha$$

設 $\beta=5\alpha+x$，其中 $0<x<\alpha$，

所以 $\dfrac{11}{16}<\dfrac{x}{\alpha}<\dfrac{43}{52}\ \Leftrightarrow\ \dfrac{52x}{43}<\alpha<\dfrac{16x}{11}$，其中 α, x 為正整數

因此，滿足此不等式的最小 x 為 3

$$\Rightarrow\ \alpha=4,\ \beta=5\alpha+x=23,\ \frac{\alpha}{\beta}=\frac{4}{23}$$

若 $x\ge 4$，則 $\alpha>\dfrac{52x}{43}\ge\dfrac{52\cdot 4}{43}=\dfrac{208}{43}=4+\dfrac{36}{43}$ 且 $\alpha\in\mathbb{Z}_+^*$

$$\Rightarrow\ \alpha\ge 5,\ \beta=5\alpha+x\ge 5\cdot 5+4=29$$

故當 β 為最小時 $\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{4}{23}$。

5. 設 p 為質數，如果 p^2+11 的正因數之個數少於 11 個，試求滿足這樣條件的所有質數 p。

【參考解答】$p=2,3,5$。

若 $p=2$，則 $p^2+11=15=3\times 5$ 有 4 個正因數 1,3,5,15

若 $p=3$，則 $p^2+11=20=2^2\times 5$ 有 6 個正因數 1,2,4,5,10,20

若 $p=5$，則 $p^2+11=36=2^2\times 3^2$ 有 9 個正因數 1,2,3,4,6,9,12,18,36

若 $p=7$，則 $p^2+11=60=2^2\times 3\times 5$ 有 12 個正因數（不合）

欲證當 $p\ge 11$ 時，p^2+11 的正因數之個數必多於 11 個。

因為 $p>3$，則 $p^2\equiv 1(\mathrm{mod}$，$\therefore p^2+11\equiv 0(\mathrm{mo}$。

又 $p^2\equiv 1(\mathrm{mod}$，$\therefore p^2+11\equiv 0(\mathrm{mo}$。

故可令 $p^2+11=2^2\times 3\times a$，其中 a 為正整數。

若 $p\ge 11$，則 $p^2+11\ge 132\Rightarrow a\ge 11$。若 $a=11$，

則 $p^2+11=2^2\times 3\times 11$ 有 12 個正因數 1,2,3,4,6,11,12,22,33,44,66,132（不合）。

若 $a>11$，

則 $p^2+11=2^2\times 3\times a$ 有 12 個正因數 $1,2,3,4,6,12,a,2a,3a,4a,6a,12a$（不合）。