

103 學年度高雄市高級中學數學科能力競賽試題 (二)

注意事項：(1) 作答時間：1 小時。不可使用電算器。

(2) 本試卷共五題，滿分 21 分。每題配分標於題末。請將計算及證明題演算過程或理由，依序寫在答案卷上。

(3) 試題紙與答案卷請一併繳回。

1. 設 $P(x)$ 為一個整係數多項式，若 $P(3)$ 與 $P(4)$ 都是 12 的倍數，試證：

$P(7)$ 同樣也是 12 的倍數。 (4 分)

2. 設 α 為實數，且 $\sin \alpha + \cos \alpha = -1$ ，對任意正整數 n ，試證：

$\sin^n \alpha + \cos^n \alpha = (-1)^n$ 。 (4 分)

3. 已知 $2x + y + 2 = 0$ ，試求 $\log_2 \left(\frac{y}{x^2} \right)$ 的最大值。 (4 分)

4. 設 α 、 β 為正整數，且 $\frac{52}{303} < \frac{\alpha}{\beta} < \frac{16}{91}$ ，試求當 β 為最小時，則 $\frac{\alpha}{\beta}$ 的值為何。 (4 分)

5. 設 p 為質數，如果 $p^2 + 11$ 的正因數之個數少於 11 個，試求滿足這

樣條件的所有質數 p 。 (5 分)