103學年度高雄市高級中學數學科能力競賽試題（一）

參考解答

1. 已知三個正實數a,b,c滿足$a+b+c=1$，試證：$\dfrac{a-bc}{a+bc}+\dfrac{b-ca}{b+ca}+\dfrac{c-ab}{c+ab}\le\dfrac{3}{2}$。

【參考解答】因為 $\dfrac{a-bc}{a+bc}=1-\dfrac{2bc}{1-b-c+bc}=1-\dfrac{2bc}{(1-b)(1-c)}$

欲證： $\dfrac{a-bc}{a+bc}+\dfrac{b-ca}{b+ca}+\dfrac{c-ab}{c+ab}\le\dfrac{3}{2}$ **(a)**

即 $\left(1-\dfrac{2bc}{(1-b)(1-c)}\right)+\left(1-\dfrac{2ca}{(1-c)(1-a)}\right)+\left(1-\dfrac{2ab}{(1-a)(1-b)}\right)\le\dfrac{3}{2}$ **(b)**

利用交叉相乘得

$4(bc+ca+ab-3abc)\ge 3(bc+ca+ab+1-a-b-c-abc)$ **(1)**

將(1)式化簡成

$ab+bc+ca\ge 9abc$，**或** $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\ge 9$ **(2)**

又$a+b+c=1$ **，利用柯西不等式可得**

$$[(\sqrt{a})^2+(\sqrt{b})^2+(\sqrt{c})^2]\times\left[\left(\sqrt{\frac{1}{a}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{1}{b}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{1}{c}}\right)^2\right]\ge\left(\sqrt{a}\times\sqrt{\frac{1}{a}}+\sqrt{b}\times\sqrt{\frac{1}{b}}+\sqrt{c}\times\sqrt{\frac{1}{c}}\right)^2$$

$\Rightarrow 1\times\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)\ge(1+1+1)^2=9$ **(3)**

因為(2)與(3)相等，所以(b)不等成式成立，則(a)不等式成立得證。

2. 已知三角形ABC之三邊長分別為a,b,c，且其外接圓半徑為R，若$R=\dfrac{a\sqrt{bc}}{b+c}$，

試求ΔABC的三內角之度數。

【參考解答】$\because b+c\ge 2\sqrt{bc}\Rightarrow\dfrac{\sqrt{bc}}{b+c}\le\dfrac{1}{2}$. **由題意知，**$\dfrac{R}{a}=\dfrac{\sqrt{bc}}{b+c}\le\dfrac{1}{2}\Rightarrow a\ge 2R$. **但**

$a\le 2R\Rightarrow a=2R.$

$\therefore\dfrac{2\sqrt{bc}}{b+c}=1\Rightarrow b+c=2\sqrt{bc}\Rightarrow(\sqrt{b}-\sqrt{c})^2=0\Rightarrow b=c$ **。其次，由正弦定理知**

$\sin A=1\Rightarrow\angle A=90^\circ$

故$\angle B=\angle C=45^\circ$

3. 試求出方程式 $x^4+4^x+4^{-x}=\frac{21}{4}$ 的所有實數解。

【參考解答】Ans:　1 與-1

代入後可知 1 與-1 為方程式的兩個解。

且因 $x^4+4^x+4^{-x}$ 為偶函數，若能證明其在 $(0,\infty)$ 之上是遞增函數，則無其他正實數之解。

其中因 x^4 為遞增函數，故僅需討論 4^x+4^{-x} 是否為遞增函數。

設 $a,b\in(0,\infty)$ 且 $a<b$

則 $4^b+4^{-b}-\left(4^a+4^{-a}\right)=4^b-4^a+\left(\frac{1}{4^b}-\frac{1}{4^a}\right)=\left(4^b-4^a\right)\left(1-\frac{1}{4^{a+b}}\right)$

因 $a,b\in(0,\infty)$，故 $4^{a+b}>4^0=1$，可得出 $1-\frac{1}{4^{a+b}}>0$ 及 $4^b+4^{-b}-\left(4^a+4^{-a}\right)>0$。

故 $x^4+4^x+4^{-x}$ 是遞增函數，$x^4+4^x+4^{-x}=\frac{21}{4}$ 的唯一正實數解為 1。

同理，$x^4+4^x+4^{-x}=\frac{21}{4}$ 的唯一負實數解為-1。

4. 設 $a_1,a_2,a_3,\ldots,a_{40}$ 皆為正數，滿足 $a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{40}=40$ 及 $a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2+\ldots+a_{40}{}^2>100$。試證: $a_1,a_2,a_3,\ldots,a_{40}$ 中必有四個數的和大於 10。

【參考解答】為不失去一般性，不妨假設 $a_1\ge a_2\ge a_3\ge\cdots\ge a_{40}$。

考慮一個長與寬為 40 與 10 的長方形，將其分為四個正方形。

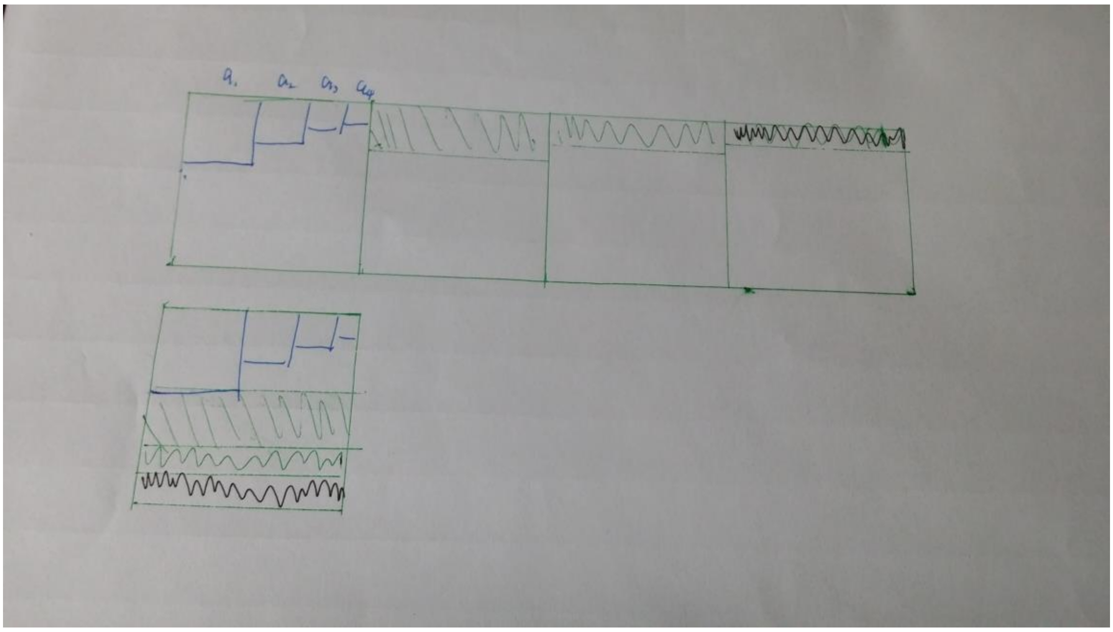
由題意知，可以將邊長分別為 $a_1,a_2,a_3,\ldots,a_{40}$ 的 40 個小正方形，由左至右放進這個長方形中。

假設 $a_1+a_2+a_3+a_4\le 10$，則可知在左邊第二個正方形的所有小正方形皆包含於一個長與寬為 10 與 a_2 的長方形中。

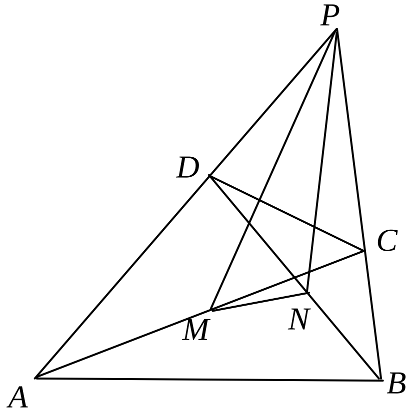
同理，在左邊第三個正方形的所有小正方形皆包含於一個長與寬為 10 與 a_3 的長方形中，在左邊第四個正方形的所有小正方形皆包含於一個長與寬為 10 與 a_4 的長方形中。

因假設 $a_1+a_2+a_3+a_4\le 10$，故可將上述的三個長方形放入左邊第一個正方形中，且不與在這個正方形中的小正方形重疊。可得知這 40 個小正方形的面積和不大於 100。與 $a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2+\ldots+a_{40}{}^2>100$ 矛盾。

可參考附圖。



5. 如圖，在四邊形 $ABCD$ 中 M 、N 分別是對角線 $\overline{AC}$ 、$\overline{BD}$ 的中點，又 $\overline{AD}$ 與 $\overline{BC}$ 相交於點 P。 試證明：ΔPMN 的面積是四邊形 $ABCD$ 面積的四分之一，即 $S_{\Delta PMN}=\dfrac{1}{4}S_{四邊形ABCD}$。



【參考解答】 因為 A,D,P 與 B,C,P 分別共線，故 $\overrightarrow{PD}\times\overrightarrow{PA}=\vec{0}$ 且 $\overrightarrow{PB}\times\overrightarrow{PC}=\vec{0}$。

設 $k=\dfrac{\overrightarrow{PA}\times\overrightarrow{PB}}{\left\|\overrightarrow{PA}\times\overrightarrow{PB}\right\|}$ ，則

$$S_{\Delta PMN}\cdot k=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{PN}\times\overrightarrow{PM}\right)=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{PD}+\overrightarrow{PB}\right)\times\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PC}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{8}\left(\overrightarrow{PB}\times\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PD}\times\overrightarrow{PC}\right)=\frac{1}{8}\left(\overrightarrow{PB}\times\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PC}\times\overrightarrow{PD}\right)=\frac{1}{8}\left(2S_{\Delta ABP}-2S_{\Delta PDC}\right)k$$

$$=\frac{1}{4}S_{四邊形ABCD}\cdot k，\quad 故\ S_{\Delta PMN}=\frac{1}{4}S_{四邊形ABCD}。$$