

# 103 學年度高雄市高級中學數學科能力競賽試題(一)

注意事項：(1) 作答時間：2 小時。不可使用電算器。

- (2) 本試卷共五題，滿分 49 分。每題配分標於題末。計算、證明題請務必依序寫在答案卷上。同時必須寫出演算過程或理由。
- (3) 試題紙與答案卷請一併繳回。

1. 已知三個正實數  $a, b, c$  滿足  $a+b+c=1$ ，試證：

$$\frac{a-bc}{a+bc} + \frac{b-ca}{b+ca} + \frac{c-ab}{c+ab} \leq \frac{3}{2}。 \quad (9 \text{ 分})$$

2. 已知三角形  $ABC$  之三邊長分別為  $a, b, c$ ，且其外接圓半徑為  $R$ ，若

$$R = \frac{a\sqrt{bc}}{b+c}，試求 \triangle ABC 的三內角之度數。 \quad (10 \text{ 分})$$

3. 試求方程式  $x^4 + 4^x + 4^{-x} = \frac{21}{4}$  的所有實數解。 (10 分)

4. 設  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{40}$  皆為正數，且滿足  $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{40} = 40$  及

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_{40}^2 > 100。試證：  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{40}$  中必有四個數的和大於 10。 \quad (10 \text{ 分})$$

5. 如圖，在四邊形  $ABCD$  中，  $M$ 、 $N$  分別是對角線  $\overline{AC}$ 、 $\overline{BD}$  的中點，

又直線  $AD$  與直線  $BC$  相交於點  $P$ 。試證： $\triangle PMN$  的面積是四邊形

$$ABCD \text{ 面積的四分之一，即 } S_{\triangle PMN} = \frac{1}{4} S_{\text{四邊形} ABCD}。 \quad (10 \text{ 分})$$

