

103 學年度高雄市高級中學數學科能力競賽試題

口試題 參考答案

口試題(一)：

已知費波拿契數列： $\{a_n\} = \{0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots\}$ 。令 $x_n = \frac{a_n}{a_{n+1}}$ ，試問該

數列 $\{x_n\}$ 是否會趨近於一個定值 L 當 n 趨近於無窮大時？若是，此定值 L 為何？

【參考解答】(1) **Yes!**

首先， $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ $n \geq 2$ 。

由數列 $\{x_n\}$ 的定義可推論得：

$$x_{n+1} - x_n = \frac{a_{n+1}}{a_{n+2}} - \frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{a_{n+1}^2 - a_n a_{n+2}}{a_{n+1} a_{n+2}} = \frac{(-1)^{n+1}}{a_{n+1} a_{n+2}}, \quad n \geq 1.$$

因為

$$\begin{aligned} x_{2n+2} - x_{2n} &= \frac{1}{a_{2n+2} a_{2n+3}} + \frac{-1}{a_{2n+1} a_{2n+2}} = \frac{a_{2n+2} - a_{2n+3}}{a_{2n+1} a_{2n+2} a_{2n+3}} \\ &= \frac{-1}{a_{2n+1} a_{2n+3}} < 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow \{x_{2n}\}$ 是一個遞減數列，且對於所有 $n \in \mathbb{N}$ $0 \leq x_n \leq 1$ 。

故 $\{x_{2n}\}$ 會趨近於一個定值 L 當 n 趨近於無窮大時。

(2) 對於所有 $n \in \mathbb{N}$ ，由(1)可得 $x_{2n+1} - x_{2n} = \frac{-1}{a_{2n+1} a_{2n+2}}$ 。因為當 n 趨近

於無窮大時，數列 $\{a_n\}$ 會趨近於無窮大。所以， $\{x_{2n+1} - x_{2n}\}$ 會趨近

於0，即數列 $\{x_{2n+1}\}$ 與數列 $\{x_{2n}\}$ 會趨近於同一個定值 L 。

故數列 $\{x_n\}$ 會趨近於一個定值 L 。

$$\text{因為 } x_n = \frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{a_n}{a_n + a_{n-1}} = \frac{1}{1 + \frac{a_{n-1}}{a_n}} = \frac{1}{1 + x_{n-1}}, \text{ 定值 } L \text{ 將滿足方程}$$

$$\text{式： } L = \frac{1}{1+L}, \text{ 解得 } L = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}。$$

口試題(二)：

設 A, B, C 為 $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ 的三個子集合。若要求 $A \cap B = \phi$ 且 $A \cap C = \phi$ ，請問滿足如此條件的 (A, B, C) 共有多少？

【參考解答】 5^n

對 $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ 中的元素作為考慮。每個元素 x 都有五種可能

$$x \in A, x \notin B, x \notin C$$

$$x \notin A, x \in B, x \in C$$

$$x \notin A, x \in B, x \notin C$$

$$x \notin A, x \notin B, x \in C$$

$$x \notin A, x \notin B, x \notin C$$

若每個元素都給好了一個可能，則恰好對應所求的一組 (A, B, C) 。

故共有 5^n 個滿足條件的 (A, B, C) 。

口試題(三)

對任意正整數 n ，試證： $n^5 - n$ 必為 30 的倍數。

【參考解答】 $\because n^5 - n = n(n-1)(n+1)(n^2+1)$ ， & $6 | n(n-1)(n+1) \Rightarrow 6 | n^5 - n$ 。

其次，

(1) 如果 $n-1, n, n+1$ 中有一數為 5 的倍數，因此 $n^5 - n$ 必為 5 的倍數，所以 $n^5 - n$ 必為 30 的倍數。

(2) 如果 $n-1, n, n+1$ 都不是 5 的倍數，

$n = 5k \pm 2 \Rightarrow n^2 + 1 = (5k \pm 2)^2 + 1 = 5(5k^2 \pm 4k + 1)$ 所以 $n^5 - n$ 必為 30 的倍數。