

103 學年度高級中學數學學科能力競賽

嘉義區複賽試題 (二) 編號：_____

(時間一小時)

注意事項：

1. 本試卷共六題填充題，滿分為二十一分。
2. 請將答案寫在答案欄內，計算紙必須連同試卷交回。

一、求最大的整數 n 使得 $\frac{n^3+103}{n+11}$ 也是整數。
(3.5 分)

二、 $\triangle ABC$ 在 $\angle A$ 的兩條三等分角線分別交 BC 於 D 及 E 。已知
(3.5 分) $\overline{BD}:\overline{DE} = 2:1$ ， $\overline{AB}:\overline{AC} = 1:3$ ，求 $\overline{DE}:\overline{EC}$ 。

三、設 A, B, C, D 為空間中相異四點，除 B, D 兩點間沒有線段相連外，其餘任
(3.5 分) 兩點間均恰有一條線段連接，且這些連接的線段長度均為 1。有一隻螞蟻，今從 A 點出發，沿著連接的線段爬行，當抵達 C 點時就停止。假設螞蟻在每一點選擇接下來走哪一條路的機率均等，那麼螞蟻所走距離的期望值是多少？

四、設 $f(x) = \frac{2^x - 2}{2^x + 2}$ ，求 $\sum_{n=1}^{2014} f\left(\frac{n}{1007}\right)$ 。
(3.5 分)

五、已知 a, b 為正數，且 $a^2 \geq b$ ，求 $5a^4 + \frac{1-b^3}{a^2}$ 的最小值。
(3.5 分)

六、設集合 A, B, C 滿足 $A \cup B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ ， $A \cap B \cap C = \emptyset$
(3.5 分) (\emptyset 為空集合)。若序對 (A, B, C) 的可能情形共有 $2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \cdot 7^d$ 種，則數對 (a, b, c, d) 為何？