103 學年度高級中學數學學科能力競賽

嘉義區複賽試題（一）【解答】

一、【解】

將全班n個同學編號為$1,2,\cdots,n$. 每個學生不能選自己，所以每個人有$n-1$個選擇，總共有$(n-1)^n$個可能性。

又每個人都得被討厭的一票，所以等於是$\{1,2,\cdots,n\}$的一個 1-1 映射，設第i個同學被第m_i個同學列為討厭人物，而A_i代表第i個同學「討厭」自己的事件，則所有這個題目要求的條件滿足的狀況共有

$n!-\#\left\{\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right\}$種可能方式（因不能有任一個同學選到自己）。

$$
\begin{aligned}
\#\left\{\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right\} &= \sum_{i=1}^{n}\#\{A_i\}-\sum_{1<i<j\le n}\#\{A_i\cap A_j\}+\cdots+(-1)^{n+1}\#\{A_1\cap A_2\cdots\cap A_n\}\\
&= C_1^n(n-1)!-C_2^n(n-2)!+C_3^n(n-3)!+\cdots+(-1)^{n+1}C_n^n\\
&= n!-\frac{1}{2!}n!+\frac{1}{3!}n!+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n!}n!\\
&= n!\left(1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{n!}\right)
\end{aligned}
$$

所求機率為 $\dfrac{n!\left(\dfrac{1}{2!}-\dfrac{1}{3!}+\cdots+(-1)^n\cdot\dfrac{1}{n!}\right)}{(n-1)^n}$, 當$n=5$時，機率為

$$\frac{1}{4^5}(5\times4\times3-5\times4+5-1)=\frac{11}{256}.$$

二、【解】

設$a=\tan\alpha, b=\tan\beta, c=\tan\gamma$, 則$0<a,b,c<1$且$a^2+b^2+c^2=\sqrt{3}$. 由<u>算術−幾何平均不等式</u>知：

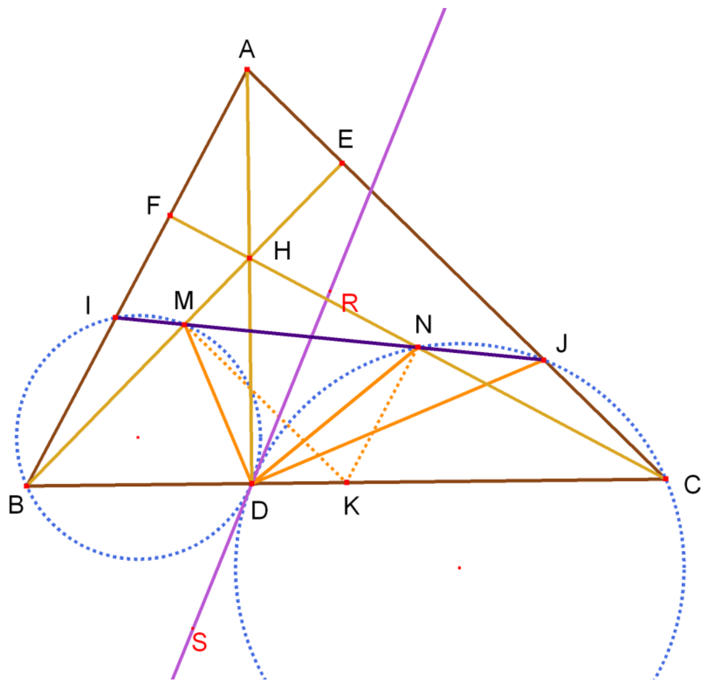
$$a(1-a^2)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2a^2(1-a^2)^2}\le\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\left(\frac{2a^2+(1-a^2)+(1-a^2)}{3}\right)^3}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^3}=\frac{2}{3\sqrt{3}}.$$

同理可得 $b(1-b^2)\le 2/(3\sqrt{3})$ 及 $c(1-c^2)\le 2/(3\sqrt{3})$. 由正切函數的倍角公式 $\tan(2x)=\dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$, 有

$$\begin{aligned}\tan(2\alpha)+\tan(2\beta)+\tan(2\gamma)&=\frac{2a}{1-a^2}+\frac{2b}{1-b^2}+\frac{2c}{1-c^2}\\&=\frac{2a^2}{a(1-a^2)}+\frac{2b^2}{b(1-b^2)}+\frac{2c^2}{c(1-c^2)}\\&\ge\frac{3\sqrt{3}}{2}\cdot 2(a^2+b^2+c^2)=9.\end{aligned}$$

三、【解】



1. 令 K 為 BC 的中點。則 $NK \parallel AB, MK \parallel AC$， 因此 $KN \perp CH$, $KM \perp BE$, 得 M,N,H,K 共圓，記這圓為 O ，因 $\angle HNK=90°$, 它的直徑為 HK 且 $\angle HDK=90°$, 故 D 在 O 上 。

2. 設 O_C 再交 AC 於 J'. 則 $\angle C=180°-\angle DNJ'$. 由 1. 知 $\angle MND=\angle MKD=\angle C$ ($MK \parallel AC$)， 因此 $\angle MND+\angle DNJ'=180°$,

M,N,J' 共線，$J'=J$ 在 ΔCDN 的外接圓 O_C 上。同理，I 在 ΔBDM 的外接圓 O_B 上。

3. 如圖，過 D 對 O_C, O_B 的切線分別為 RD, SD。則

$$\begin{aligned}\angle RDC &= \angle RDN + \angle NDC = \angle DCN + \angle NDC \\ &= \angle HND = \angle BMD = \angle BDS\end{aligned}$$

故 $RD=SD$ 為 O_B 與 O_C 的公切線。證畢。

四、【解】

$\because$ 從 6 門中選修 3 門的組合數 $\binom{6}{3}=20.$

如果每名學生都選擇不同的 3 門課，各人所選課如下圖所示，則對於任 2 門課，有 4 人都選了，也有 4 人都沒選。

123	134	146	236	345
124	135	156	245	346
125	136	234	246	356
126	145	235	256	456
有 $1,2$				無 $1,2$

$\therefore$ 不可能有 5 人都選或都不選某 2 門課。

五、【解】

證明：令 $n=3^k(3s+r), r=1,2, k\ge 0, s\ge 0,$ 則

$$4^n+2^n+1=(2^{3^k})^{6s+2r}+(2^{3^k})^{3s+2r}+1$$

$\because x^2+x+1 \,\big|\, x^{6s+2r}+x^{3s+r}+1, \forall s\ge 0, r=1,2$ (成立因 x^2+x+1 的根 w,w^2 也都會是右式的根), 但已知 4^n+2^n+1 為質數，所以

$$\begin{aligned}(2^{3^k})^2+2^{3^k}+1 &= 4^n+2^n+1 \\ &= (2^{3^k})^{6s+2r}+(2^{3^k})^{3s+2r}+1\end{aligned}$$

得 $3s+r=1,$ 故 $s=0$ 且 $r=1.$ 因此 $n=3^k$