103 學年度高級中學數學學科能力競賽

嘉義區複賽試題（一）　　編號：____

（時間二小時）

注意事項：

1. 本試卷共五題**計算證明題**，滿分為四十九分。

2. 請將答案寫在答案欄內，計算紙必須連同試卷交回。

一、老師要全班同學每人挑出一個班上讓人討厭的人，但不能選自己。假設每人被選中的機率相同，若全班共有5個同學，試問：每個人都剛好得到一票「被討厭」的機率是多少?
(9 分)

二、令 H 為 ΔABC 的垂心，AH, BH, CH 分別交 BC, CA, AB 於 D, E, F；BE, CF 的中點分別為 M, N; MN 分別交 AB, AC 於 I, J.
(10 分)

證明：

（1）I 在 ΔBDM 的外接圓 O_B 上；J 在 ΔCDN 的外接圓 O_C 上，

（2）O_B 與 O_C 相切於點 D.

三、設 $0<\alpha,\beta,\gamma<\dfrac{\pi}{4}$, 且 $\tan^2\alpha+\tan^2\beta+\tan^2\gamma=\sqrt{3}$. 證明
(10 分)

$$\tan(2\alpha)+\tan(2\beta)+\tan(2\gamma)\geq 9.$$

四、某數學營開了6門課，該營隊的20名學生每人均已選修其中的0至6門課。試問：是否可以找出5名學生和2門課，使得這5人同時都選修此2門課或同時都沒選修此2門課？為甚麼？
(10 分)

五、若 n 為正整數，且 4^n+2^n+1 為質數，則 n 必為3的(冪)次方。
(10 分)