103 學年度高級中學數學科能力競賽複賽試題

南區（屏東區） 筆試（一）{參考解答}

一、已知數列$\{a_n\}$滿足$a_1=\frac{1}{2}$及$n(a_{n+1}-a_n)+2a_{n+1}=0,\ n\in N$，

若$b_n=\frac{(n+2)a_n}{2^{n+1}}$，$S_n$是$\{b_n\}$的前$n$項和，求使$S_n>\frac{2013}{4028}$成立的最小$n$值

【參考解答】

$$\because n(a_{n+1}-a_n)+2a_{n+1}=0\Rightarrow(n+2)a_{n+1}=na_n\Rightarrow a_{n+1}=\frac{n}{n+2}a_n$$

$$\therefore a_n=\frac{n-1}{n+1}\frac{n-2}{n}\frac{n-3}{n-1}\cdots\frac{2}{4}\frac{1}{3}a_1=\frac{1}{n(n+1)}$$

$$\because b_n=\frac{(n+2)a_n}{2^{n+1}}=\frac{1}{2^{n+1}}\frac{n+2}{n(n+1)}$$

令$n+2=A(n+1)-Bn\Rightarrow A=2,B=1$

$$\therefore\frac{1}{2^{n+1}}\frac{n+2}{n(n+1)}=\frac{1}{2^{n+1}}\frac{2(n+1)-n}{n(n+1)}=\frac{1}{2^{n+1}}\left(\frac{2}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=\frac{1}{n2^n}-\frac{1}{(n+1)2^{n+1}}$$

$$\therefore S_n=\left(\frac{1}{1\cdot2^1}-\frac{1}{2\cdot2^2}\right)+\left(\frac{1}{2\cdot2^2}-\frac{1}{3\cdot2^3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n\cdot2^n}-\frac{1}{(n+1)2^{n+1}}\right)$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)2^{n+1}}$$

$$S_n>\frac{2013}{4028}\Leftrightarrow\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{(n+1)2^n}\right)>\frac{2013}{4028}\Leftrightarrow1-\frac{1}{(n+1)2^n}>\frac{2013}{2014}\Leftrightarrow\frac{1}{(n+1)2^n}<\frac{1}{2014}$$

$\therefore(n+1)2^n>2014$

當$n=8$時，$(n+1)2^n=2304>2014$，所以n最小為 8。

二、證明任意給 10 個正整數，其中必存在 6 個數，將他們用適當的運算號連起來後，其運算結果是 315 的倍數。

【參考解答】 $315=9\times7\times5$

一個正整數被 9 除後，其餘數分別為 0, 1, 2, 3, …….,8，因此任意給 10 個正整數，必有兩個數在同一個餘數類，記為$k_1,\ k_2$，

因此$9\,|\,k_1-k_2$。

此時 10 個整數中去掉此 2 個數後，剩下 8 個數，同理一個正整數被 7 除後，其餘數分別為 0, 1, 2, 3, …….,6，因此任意給 8 正個整數，必有兩個數在同一個餘數類，記為$k_3,\ k_4$，因此$7\,|\,k_3-k_4$。

剩下 6 個正整數分入 5 個剩餘類，必有兩個數在同一個餘數類，記為 k_5，k_6，因此 $5 \mid k_5 - k_6$。

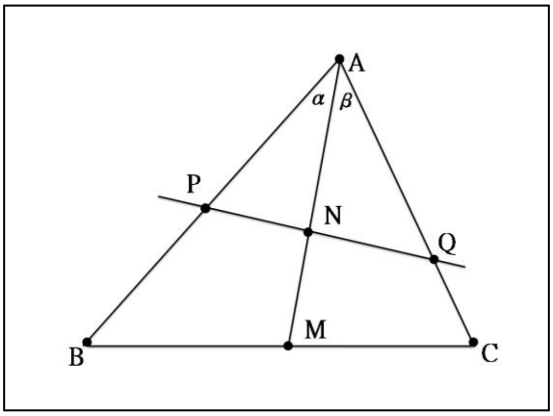
故 $(k_1-k_2)(k_3-k_4)(k_5-k_6)$ 為 315 的倍數。

三、如右圖，

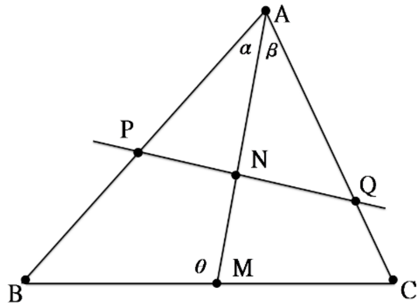
已知 AM 為△ABC 邊 BC 上的中線,

任作一直線交 AB, AC, AM 於 P, Q, N 三點。

求證: $\dfrac{AB}{AP},\dfrac{AM}{AN},\dfrac{AC}{AQ}$ 成等差數列。



【參考解答】



△ABC=△ABM+△AMC

△ABC=$1/2$*AB*AC*$\sin(\alpha+\beta)$

△ABM=$1/2$*AB*AM*$\sin(\alpha)$

△AMC=$1/2*AM*AC*\sin(\beta)$

所以, $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{AM}=\dfrac{\sin\alpha}{AC}+\dfrac{\sin\beta}{AB}$ 。

設∠AMB=θ 如圖。

$$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{AN}=\frac{\sin\alpha}{AQ}+\frac{\sin\beta}{AP}\cdots\cdots(1)$$

$$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{AM}=\frac{\sin\alpha}{AC}+\frac{\sin\beta}{AB}\cdots\cdots(2)$$

又在△ABM 和 △ACM 中，由正玄定理 $\dfrac{\sin\alpha}{BM}=\dfrac{\sin\theta}{AB}$, $\dfrac{\sin\beta}{CM}=\dfrac{\sin(\pi-\theta)}{AC}$ 。

因為, AM 為 BC 的中線, 所以 BM=CM。 $\sin(\pi-\theta)=\sin(\theta)$ ，所以,

$$\frac{\sin\alpha}{AC}=\frac{\sin\beta}{AB}$$ 。

代入（2）得

$$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{AM}=\frac{2\sin\alpha}{AC}=\frac{2\sin\beta}{AB}\cdots\cdots(3)$$ 。

由（1）除以（3）得

$$\frac{AM}{AN}=\frac{1}{2}\left(\frac{AB}{AP}+\frac{AC}{AQ}\right)$$

所以，$\frac{AB}{AP},\frac{AM}{AN},\frac{AC}{AQ}$ 成等差數列。

四、設 x、y、z 均為整數且滿足 $\begin{cases}x^3+y^3+z^3=132\\x+y+z=6\end{cases}$，求 $|x|+2|y|+|z|$ 的所有可能值為何？

【參考解答】

$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y) \;\Rightarrow\; 132-z^3=(6-z)^3-3xy(6-z)$

由上式知 $z\neq 6$

$\Rightarrow\; xy=-6z+\frac{28}{6-z}$

$\therefore 6-z=\pm1,\pm2,\pm4,\pm7,\pm14,\pm28$

(1) $6-z=1$,

$x+y=-2$，$xy=1$ 此時 $(2,-1,5)$ 為其中一組解

(2) $6-z=-1$,

$x+y=-1$，$xy=-70$ 此時無整數解

(3) $6-z=\pm2$, 此時無整數解

(4) $6-z=4$ 此時 $(5,-1,2)$ 為其中一組解

(5) $6-z=7$ 此時 $(5,2,-1)$ 為其中一組解

其他情形則無整數解

此為對稱之型式，故 $|x|+2|y|+|z|$ 的所有可能值為 9, 10, 13