

教育部 102 學年度高級中學數學競賽

中投區複賽試題 (二)

編號：_____

(時間一小時)

注意事項：

1. 本試卷共六題填充題，滿分為二十一分。
2. 請將答案寫在答案欄內，計算紙必須連同試卷交回。

一、設 P 為拋物線 $x^2 = 4y + 4$ 之頂點， \overline{AB} 為此拋物線上不過 P 的一弦，
(5分) 當 $\angle APB = 90^\circ$ ，求 $\triangle APB$ 之最小面積。

二、設 $x = 0.1234$, $y = 0.8766$ ，求
(4分)

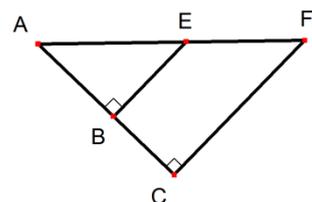
$$\left(\sum_{i=0}^{20} C_i^{20+i} x^{21} y^i + \sum_{j=0}^{20} C_j^{20+j} y^{21} x^j - 2 \right)^{2013}。$$

三、設 $f(x)$ 和 $g(x)$ 皆為實係數二次多項式且首項係數都是 1，已知 $f^2(x)$ 除
(3分) 以 $g(x)$ 的餘式為 $4x - 4$ ，而 $g^2(x)$ 除以 $f(x)$ 的餘式為 $-4x - 4$ ，求
 $f(x) + g(x)$ 。

四、若 $3^{20} - 2^{30} = a \cdot 10^n$ ，其中 $1 < a < 10$ ，且 n 為正整數，求 a 的整數部分。
(3分) ($\log 2 \doteq 0.3010$, $\log 3 \doteq 0.4771$)

五、設函數 f 滿足：對所有的實數 $x \neq 0$ 恆有 $2f(x) + 5f\left(\frac{1}{x}\right) = x$ 。
(3分) 試求 $f(2)$ 。

六、如右圖所示，直角三角形 ACF 中
(3分) $\angle C = 90^\circ$, $\overline{CF} = 3$, 若 $\overline{BE} = \overline{EF} = 2$,



且 $\angle ABE = 90^\circ$, 求 \overline{BF} 。