教育部 102 學年度高級中學數學競賽

中投區複賽試題（一）【解答】

一、【解】

因 $\dfrac{a^3}{1-a}=\dfrac{1}{1-a}-\dfrac{1-a^3}{1-a}=\dfrac{1}{1-a}-(1+a+a^2)$, 所以

$$\begin{aligned}\frac{a^3}{1-a}+\frac{b^3}{1-b}+\frac{c^3}{1-c}&=f(a)+f(b)+f(c)-3-(a+b+c)\\&=f(a)+f(b)+f(c)-4\end{aligned}$$

其中 $f(x)=\dfrac{1}{1-x}-x^2$ 。 考慮 $0<x,z<1$, 欲證

$$f(\theta x+(1-\theta)z)\le\theta f(x)+(1-\theta)f(z)\ \ \forall\ 0\le\theta\le 1$$

令 $y=\theta x+(1-\theta)z$, 則 $x-y=(1-\theta)(x-z)$ 且 $z-y=\theta(z-x)$

現在

$$\begin{aligned}f(z)-f(y)&=\frac{1}{1-z}-z^2-(\frac{1}{1-y}-y^2)\\&=\frac{z-y}{(1-z)(1-y)}-(z-y)(z+y)\\&=(z-y)\left[\frac{1}{(1-z)(1-y)}-(z+y)\right],\end{aligned}$$

$$f(x)-f(y)=(x-y)\left[\frac{1}{(1-x)(1-y)}-(x+y)\right].$$

因此

$$\begin{aligned}&\theta\left[f(x)-f(y)\right]+(1-\theta)(f(z)-f(y))\\&=\theta f(x)+(1-\theta)f(z)-f(y)\\&=\theta(x-y)\left[\frac{1}{(1-x)(1-y)}-(x+y)\right]+(1-\theta)(z-y)\left[\frac{1}{(1-z)(1-y)}-(z+y)\right]\\&=\theta(1-\theta)(x-z)\left[\frac{1}{(1-x)(1-y)}-(x+y)\right]+(1-\theta)\theta(z-x)\left[\frac{1}{(1-z)(1-y)}-(z+y)\right]\\&=\theta(1-\theta)(x-z)\left[\frac{1}{(1-x)(1-y)}-(x+y)-\frac{1}{(1-z)(1-y)}+z+y\right]\\&=\theta(1-\theta)(x-z)^2\left[\frac{1}{(1-x)(1-y)(1-z)}-1\right]\ge 0\end{aligned}$$

所以 $\theta f(x)+(1-\theta)f(z)\geq f(\theta x+(1-\theta)z)\ \forall\ 0\leq\theta\leq 1\cdots(*)$

由$(*)$知

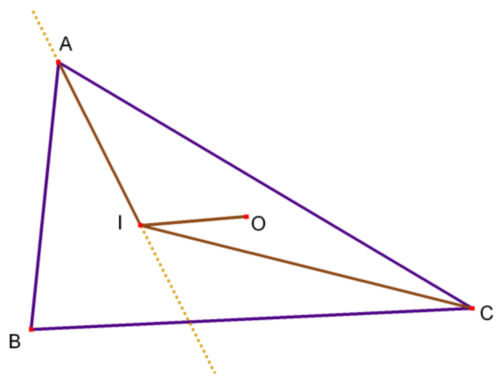
$$f(a)+f(b)\geq 2f(\frac{a+b}{2})$$

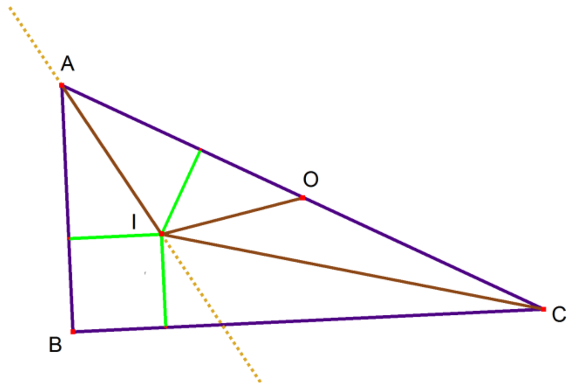
$$\frac{2}{3}f(\frac{a+b}{2})+\frac{1}{3}f(c)\geq f(\frac{a+b+c}{3})$$

因此 $f(a)+f(b)+f(c)\geq 3f(\frac{a+b+c}{3})=3f(\frac{1}{3})=\frac{25}{6}$

且 $\frac{a^3}{1-a}+\frac{b^3}{1-b}+\frac{c^3}{1-c}\geq f(a)+f(b)+f(c)-4=\frac{25}{6}-4=\frac{1}{6}$

二、【解】





因 $\angle AIC=180^\circ-\frac{1}{2}\angle A-\frac{1}{2}\angle C=90^\circ+\frac{1}{2}\angle B>90^\circ$， A、C 在 IO 的不同側，又 $\angle CIO=45^\circ$，O、C 在 AI 的同一側(如右上圖)。因此

$$90^\circ+\frac{1}{2}\angle B=\angle AIC=90^\circ+45^\circ。$$

得 $\angle B=90^\circ$，因此 O 在 AC 上。令 R、r 分別為外接圓半徑及內切圓半徑。則 $AO=OC=R$，

$$IA=\frac{r}{\sin\frac{\angle A}{2}}=R\cos\frac{\angle A}{2}。$$

$r=R\sin\frac{\angle A}{2}\cos\frac{\angle A}{2}=\frac{1}{2}R\sin A=\frac{1}{4}a$。不失一般性，設 $r=1$。則 $a=4$。以兩種方式算三角形面積得 $rs=\frac{1}{2}r(a+b+c)=\frac{1}{2}ac$。因此 $b+4=3c$。由 $16+c^2=a^2+c^2=b^2=(3c-4)^2$，得 $c=3$，$b=5$。故 $\overline{AB}:\overline{BC}:\overline{CA}=3:4:5$。

三、【解】

$f(m)$ 整除 $f(f(m)+7) \Leftrightarrow f(f(m)+7) \equiv 0 (\text{mod } f(m))$

因 $f(f(m)+7) \equiv f(7) (\text{mod } f(m))$, 故

$f(m)$ 整除 $f(f(m)+7) \Leftrightarrow f(7) \equiv 0 (\text{mod } f(m))$ 即 $f(m)$ 整除 $f(7)$.

(以上結論用高中數學也可得到)

注意：$f(x) = G(g(x)) + g(x)^3 G(g(x))$, 其中 $g(x) = x^2 - 8x + 15$ 及

$G(y) = 1 + y + y^2$.

$f(7) = G(g(7)) + g(7)^3 G(g(7))$.

$G(y)$ 在 $y > -\frac{1}{2}$ 為遞增且 $G(y) > 0$, $g(7) = 8$

故 $f(m) > f(7) = 73$ $(m > 7)$

因此對 $m \geq 8$, $f(m)$ 不整除 $f(f(m)+7)$,

對於 $m = 1, 2, \cdots, 7$, 我們有

$$f(1) = f(7) = 73 + 8^3 \cdot 73 = 3^3 \cdot 19 \cdot 73$$
$$f(2) = f(6) = 13 + 3^3 \cdot 13 = 2^2 \cdot 7 \cdot 13$$
$$f(3) = f(5) = 1 + 0^3 \cdot 1 = 1$$
$$f(4) = 1 + (-1)^3 \cdot 1 = 0$$

因此，綜合以上討論，得

正整數 m 滿足 $f(m)$ 整除 $f(f(m)+7)$ 若且若唯 $m = 1, 3, 5, 7$.

四、【解】

設 $4^n = a_0 + 10a_1 + \cdots + 10^r a_r$, $0 \leq a_i \leq 9$ 則 $D_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_r$.

因 $10^i - 1$ 可被 9 整除，$1 \leq i \leq r$,

所以 9 整除 $\sum_{i=0}^{r} a_i (10^i - 1) = \sum_{i=1}^{r} a_i 10^i - \sum_{i=1}^{r} a_i = 4^n - D_n$.

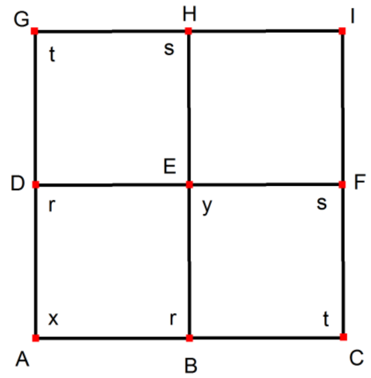
同理，9 可整除 $4^{n+1} - D_{n+1}$.

故 9 可整除 $(4^{n+1} - D_{n+1}) - (4^n - D_n) = 3 \cdot 4^n - (D_{n+1} - D_n)$

若 $D_{n+1} = D_n$ 則 9 可整除 $3 \cdot 4^n$, 這顯然矛盾。

因此不存在正整數n使得$D_n = D_{n+1}$.

五、【證】



右圖中的小寫數字代表由該點走到I的機率，由於對稱性D與B, H與F, G與C的機率相同，按規則，它們滿足以下方程式：

$$s = \tfrac{1}{3}(1 + y + t) \cdots\cdots (1)$$

$$y = \tfrac{1}{4}(2s + 2r) = \tfrac{r+s}{2} \cdots\cdots (2)$$

$$r = \tfrac{1}{3}(y + t)$$

$$t = \tfrac{r+s}{2}$$

$$x = \tfrac{r+r}{2} = r$$

$\therefore x = r,\ t = y = \frac{r+s}{2} \ \Rightarrow\ 2y = 2t = r + s$

$\therefore r = \frac{1}{3}(y + t) = \frac{2}{3}y = \frac{2}{3}t \ \Rightarrow\ 2t = 2y = 3r = 3x$

代入(2)

$\therefore 3r = r + s \ \Rightarrow\ s = 2r = 2x$

代入(1), 得 $2x = \frac{1}{3}(1 + 3x) = \frac{1}{3} + x \ \Rightarrow\ x = \frac{1}{3}$

由A出發走至I的機率為$\frac{1}{3}$.