

教育部 102 學年度高級中學數學競賽

中投區複賽試題 (一)

編號：_____

(時間二小時)

注意事項：

1. 本試卷共五題計算證明題，滿分為四十九分。
2. 請將答案寫在答案欄內，計算紙必須連同試卷交回。

一、設 $a > 0, b > 0, c > 0$ 且 $a + b + c = 1$,

(9分) 證明：
$$\frac{a^3}{1-a} + \frac{b^3}{1-b} + \frac{c^3}{1-c} \geq \frac{1}{6}。$$

二、設三角形 ABC 的內心為 I 且外心為 O ，已知 $\angle AIO = 90^\circ$ ， $\angle CIO = 45^\circ$ ，

(10分) 求 $\overline{AB} : \overline{BC} : \overline{CA}$ 。

三、令 $f(x) = 1 + (x^2 - 8x + 15) + (x^2 - 8x + 15)^2 + \cdots + (x^2 - 8x + 15)^5$ ，求所有的正整

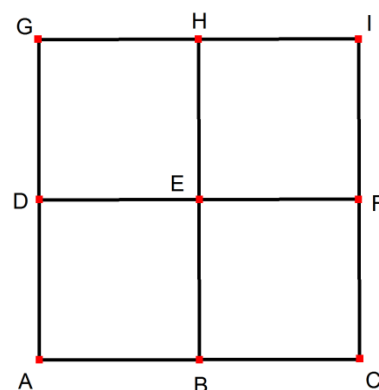
(10分) 數 m 使得 $f(m)$ 可整除 $f(f(m)+7)$ 。

四、令 D_n 表 4^n 的十進位展開的所有位數的和，例如：因為 $4^1 = 4$ ， $4^2 = 16$ ，

(10分) 所以 $D_1 = 4$ ， $D_2 = 1 + 6 = 7$ 。試決定所有正整數 n 使得 $D_n = D_{n+1}$ 。

五、設計一個遊戲如右圖所示，由 A 點出發，每

- (10分) 一步以相同的機率走向鄰近的點。例如，若第 n 步位於 B 點，則第 $n+1$ 步位於 A ， E 或 C 的機率各是 $\frac{1}{3}$ 。規定走回 A 點或走到 I 點時，遊戲停止。問由 A 點出發，最後停在 I 點的



機率為何?