

台北市 102 學年度
高級中學數理及資訊學科能力競賽
數學科筆試(二)試題

編號：_____ (學生自填)

注意事項：

1. 本試卷共七題填充題，每題 3 分，滿分為 21 分。
2. 考試時間：1 小時。
3. 試題及計算紙必須連同答案卷交回。
4. 將答案填寫在答案欄內。

1. 千位數字是 2 且恰有兩個數字相同的四位數有 _____ (一) _____ 個。

2. 若 a 、 b 、 c 為三個相異的實數，滿足方程式 $x^2 + ax + 1 = 0$ 和 $x^2 + bx + c = 0$ 有一個相同的實根，且方程式 $x^2 + x + a = 0$ 和 $x^2 + cx + b = 0$ 也有一個相同的實根，則 $a(b+c) =$ _____ (二) _____。

3. 若 $f(x)$ 為二次實係數多項式函數，滿足
$$\begin{cases} -1 \leq f(1) \leq 3 \\ 6 \leq f(2) \leq 10 \\ 2 \leq f(4) \leq 24 \end{cases}$$
，則 $f(5)$ 的最大值為 _____ (三) _____。

4. 設正實數數列 $\{a_n\}$ 滿足：對任意正整數 n ，皆有

$$\frac{1}{a_n a_{n+1}} + \frac{1}{a_n a_{n+2}} + \frac{1}{a_{n+1} a_{n+2}} = 1$$

若 $a_1 < a_2 < a_3$ 成等比，且 $a_1 + a_3 = 6$ ，則 $a_{2013} =$ _____ (四) _____。

5. 將一些半徑為 1 的小圓放入半徑為 11 的大圓內，使得每個小圓都與大圓內切，而且小圓彼此不重疊，則最多可以放入 _____ (五) _____ 個小圓。

6. 將 $(0,1)$ 中所有分母不大於 99 的最簡分數，由小而大排成一系列，則緊接在 $\frac{17}{76}$ 之後的最簡分數為 _____ (六) _____。

7. 若實數 a, b, c, d 滿足 $a^2 + b^2 = 5$ ， $c^2 + d^2 = 8$ ，則行列式
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ a & b & 2 \\ c & d & 1 \end{vmatrix}$$
 的最大值為 _____ (七) _____。