

台北市 102 學年度
高級中學數理及資訊學科能力競賽
數學科筆試(一)參考答案

【問題一】

求解方程式 $4\sqrt[3]{4x+3} = x^3 - 3$ 。

【參考解答】

令 $f(x) = \frac{1}{4}(x^3 - 3)$ ，則 $4x + 3 = f(x)^3$ ，可知 $x = \frac{1}{4}((f(x))^3 - 3) = f(f(x))$ 。又因

$f(x) = \frac{1}{4}(x^3 - 3)$ 為嚴格遞增函數，可推得。

(若 $f(x) > x$ ，則 $x = f(f(x)) > f(x)$ ，矛盾！若 $f(x) < x$ ，則 $x = f(f(x)) < f(x)$ ，也矛盾！)

因此， $\frac{1}{4}(x^3 - 3) = x$ ，亦即 $x^3 - 4x - 3 = 0$ 。分解得 $(x+1)(x^2 - x - 3) = 0$ ，於是可解得

$$x = -1, \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}。$$

【問題二】

設 N 代表首位數字為 6 的正整數且符合下列條件：

將其首位數字擺在末位數字(個位數)而其它位數保持不變的順序後(如 $62\dots5$ 改排成 $2\dots56$)，其所得的新正整數變成原來的 $\frac{1}{4}$ 。

試求所有滿足上述條件的正整數 N 。

【參考解答】

$$\text{由 } 6a_1a_2\dots a_n = 4(a_1a_2\dots a_n6)$$

$$\text{知 } 6 \times 10^n + a_1 \times 10^{n-1} + \dots + a_{n-1} \times 10 + a_n = 4(a_1 \times 10^n + \dots + a_{n-1} \times 100 + a_n \times 10 + 6)$$

$$\therefore 6 \times 10^n - 24 = a_1 \times 10^{n-1}(40-1) + \dots + a_{n-1} \times 10(40-1) + a_n \times (40-1)$$

$$= 39 \times [a_1 \times 10^{n-1} + \dots + a_{n-1} \times 10 + a_n]$$

$\Rightarrow 39 \mid 59\dots976$ 中間 9 之個數為 $6k+3$ 個時可成立

(最少為 3 個 9 的情況： $39 \mid 599976$ 而 $599976 = 39 \times 15384$)

故答案為 615384 、 615384615384 、 $615384615384615384\dots$ 等等。

【問題三】

試找出所有可能的數列 a_1, a_2, \dots, a_n ，同時滿足以下三個條件：

(1) 任取兩項並計算它們的和，其總和為 42；

(2) 任取三項並計算它們的和，其總和為 126；

$$(3) \sum_{k=1}^n \frac{a_k^2}{k} = a_1^2 + \frac{a_2^2}{2} + \frac{a_3^2}{3} + \dots + \frac{a_n^2}{n} = 1。$$

【參考解答】

設 $A = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ ，則因 $\sum_{i < j} (a_i + a_j)$ 的求和中每一項 a_i 都恰好出現 C_1^{n-1} 次，故

$42 = C_1^{n-1} \cdot A$ ；同理，在 $\sum_{i < j < k} (a_i + a_j + a_k)$ 的求和中每一項 a_i 都恰好出現 C_2^{n-1} 次，故

$126 = C_2^{n-1} \cdot A$ 。兩式相除可得：

$$\frac{42}{126} = \frac{(n-1)A}{\frac{(n-1)(n-2)}{2}A} = \frac{2}{n-2}$$

由此解得 $n=8$ ，進一步可推得 $A=6$ 。因此，利用柯西不等式，可得

$$(a_1^2 + \frac{a_2^2}{2} + \frac{a_3^2}{3} + \dots + \frac{a_n^2}{n})(1+2+3+\dots+n) \geq (a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n)^2 = A^2$$

$$\text{即 } \sum_{k=1}^n \frac{a_k^2}{k} = a_1^2 + \frac{a_2^2}{2} + \frac{a_3^2}{3} + \dots + \frac{a_n^2}{n} \geq \frac{A^2}{1+2+3+\dots+n} = \frac{36}{36} = 1$$

等號成立時，這 $n=8$ 項數列 a_1, a_2, \dots, a_n 必須滿足：

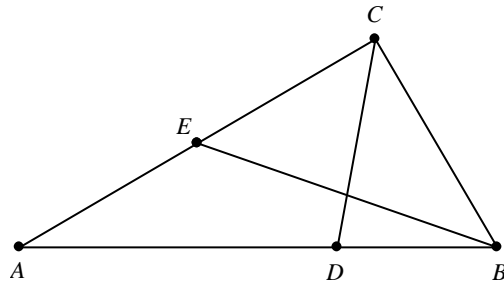
$$a_1 = \frac{a_2}{2} = \frac{a_3}{3} = \dots = \frac{a_8}{8} \text{ 且 } a_1 + a_2 + \dots + a_8 = 6。$$

由此可解得 $a_1 = \frac{1}{6}$ ， $a_2 = \frac{2}{6}$ ， $a_3 = \frac{3}{6}$ ， \dots ， $a_8 = \frac{8}{6}$ 。

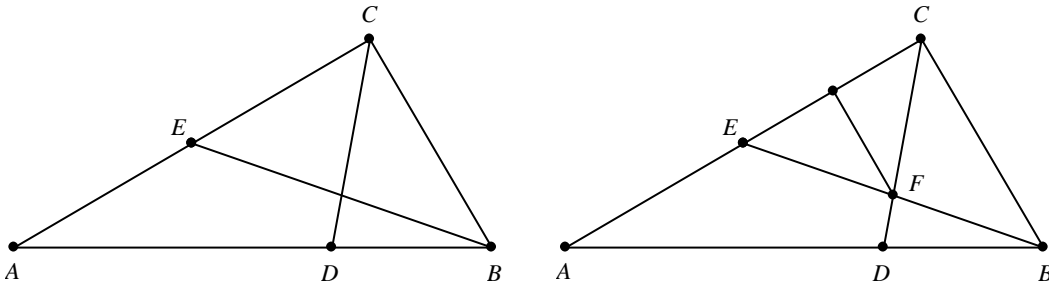
(這數列是滿足題設三個條件的唯一數列)

【問題四】

給定三角形 ABC 。設點 D 在 \overline{AB} 上且 $\overline{AD} = 2\overline{BD}$ ，又點 E 是 \overline{AC} 的中點。若 $\angle ACD = \angle BEC$ ，試證： $\triangle ABC$ 是直角三角形。



【參考解答】



證 1：設 \overline{BE} 與 \overline{CD} 的交點為 F 。因為 $\angle ACD = \angle BEC$ ，所以， $\triangle FCE$ 是等腰三角形。

在 $\triangle ABE$ 中，因為點 F 、 C 、 D 分別是直線 BE 、 EA 、 AB 上的 menelaus 點，而且點 F 、 C 、 D 共線，所以，依 Menelaus 定理，可得

$$\frac{\overline{BF}}{\overline{FE}} \times \left(-\frac{\overline{EC}}{\overline{CA}} \right) \times \frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} = -1。$$

因為點 E 是 \overline{AC} 的中點且 $\overline{AD}/\overline{DB} = 2$ ，所以， $\overline{BF} = \overline{FE}$ ，點 F 是 \overline{BE} 的中點。因為 $\overline{FE} = \overline{FC}$ ，所以， $\overline{FB} = \overline{FE} = \overline{FC}$ 。於是，點 F 是 $\triangle BCE$ 之外接圓的圓心， $\angle ACB$ 是直角。