

**台北市 102 學年度
高級中學數理及資訊學科能力競賽
數學科筆試(一)試題**

編號：_____ (學生自填)

注意事項：

1. 本試卷共四題計算證明題，滿分 49 分。
2. 考試時間：2 小時。
3. 試題及計算紙必須連同答案卷交回。
4. 將過程填寫在答案卷內。

【問題一】12 分

試求方程式 $4\sqrt[3]{4x+3} = x^3 - 3$ 的所有實數解。

【問題二】12 分

設 N 代表首位數字為 6 的正整數且符合下列條件：

將其首位數字擺在末位數字(個位數)而其它位數保持不變的順序後(如 $62\dots5$ 改排成 $2\dots56$)，其所得的新正整數變成原來的 $\frac{1}{4}$ 。

試求所有滿足上述條件的正整數 N 。

【問題三】12 分

試找出所有可能的數列 a_1, a_2, \dots, a_n ，同時滿足以下三個條件：

- (1) 任取兩項並計算它們的和，其總和為 42；
- (2) 任取三項並計算它們的和，其總和為 126；

(3) $\sum_{k=1}^n \frac{a_k^2}{k} = a_1^2 + \frac{a_2^2}{2} + \frac{a_3^2}{3} + \dots + \frac{a_n^2}{n} = 1$ 。

【問題四】13 分

給定三角形 ABC 。設點 D 在 \overline{AB} 上且 $\overline{AD} = 2\overline{BD}$ ，又點 E 是 \overline{AC} 的中點。若 $\angle ACD = \angle BEC$ ，

試證： $\triangle ABC$ 是直角三角形。

