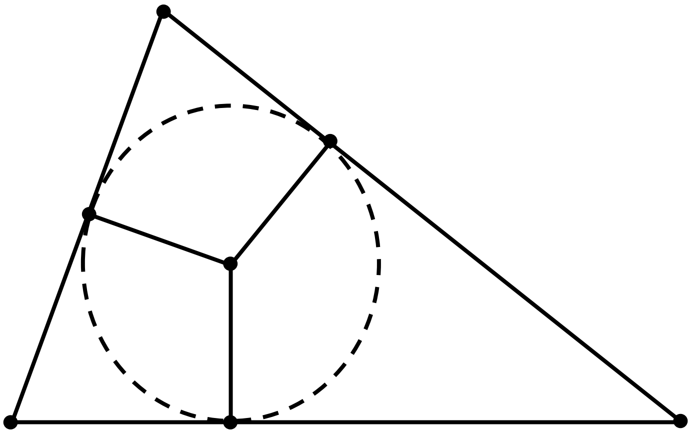
台北市 102 學年度
高級中學數理及資訊學科能力競賽
數學科口試題參考解答

【問題一】設 ΔABC 的內切圓半徑為 r，三邊長為 a,b,c，其中 $a=\overline{BC}$。

試證：$\angle A$ 為銳角的充要條件為 $b+c-a>2r$。



【參考解答】

連 $\overline{AI}$，則 $\Delta AFI \simeq \Delta AEI$。

$\therefore \overline{AF}=\overline{AE}$，$\angle FAI=\frac{1}{2}\angle A=\angle EAI$，$\angle AIF=\angle AIE=\frac{1}{2}\angle EIF$。

且 $\overline{AF}+\overline{AE}=b+c-a$，即 $\overline{AF}=\frac{1}{2}(b+c-a)$。

$\angle A$ 為銳角 $\Leftrightarrow \angle FAI<45^\circ$ 而 $\angle AIF<90^\circ-\angle FAI>45^\circ$。

故 ΔAFI 中，$\angle AFI>\angle FAI$

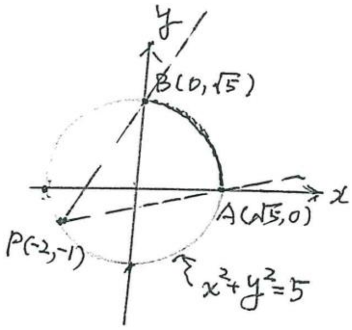
$\therefore \overline{AF}>\overline{IF}$

而 $\overline{IF}=r$ 故得 $\angle A$ 為銳角 $\Leftrightarrow \frac{1}{2}(b+c-a)>r \Leftrightarrow b+c-a>2r$，即 $2r<b+c-a$。

【問題二】試求所有滿足$x^2+y^2=5$的正有理數(x,y)的解。

【參考解答】

如圖，$P(-2,-1)$，$A(\sqrt{5},0)$，$B(0,\sqrt{5})$為圓$x^2+y^2=5$上三點。P為有理點，A,B則為非有理點。



$\overleftrightarrow{PA}$的斜率為$\dfrac{1}{\sqrt{5}+2}$即$\sqrt{5}-2\approx 0.23...$

$\overleftrightarrow{PB}$的斜率為$\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\approx 1.61...$

當$Q(x_1,y_1)$為圓弧AB上之正有理數對的點(如$(2,1),(1,2),\ldots$)

$\overleftrightarrow{PQ}$的斜率$\dfrac{y_1+1}{x_1+2}$為介於$\sqrt{5}-2\approx 0.23...$與$\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\approx 1.61...$之間的正有理數。$Q$點可利用過$P$點的直線其斜率為有理數$m$，$\sqrt{5}-2<m<\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$來求得：

$y+1=m(x+2)$，即$y=m(x+2)-1$。

解$\begin{cases} y=m(x+2)-1......(1) \\ x^2+y^2=5............(2) \end{cases}$

解得$P(-2,-1)$及$Q(x_1,y_1)$其中$x_1=\dfrac{2(m+1-m^2)}{1+m^2}$，$y_1=\dfrac{m^2+4m-1}{1+m^2}$，

其中$\sqrt{5}-2<m<\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$之有理數，故$x^2+y^2=5$正有理數對之解為

$$\begin{cases} x=\dfrac{2(1+m-m^2)}{1+m^2} \\ y=\dfrac{m^2+4m-1}{1+m^2} \end{cases}$$，其中$\sqrt{5}-2<m<\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$且$m$為有理數