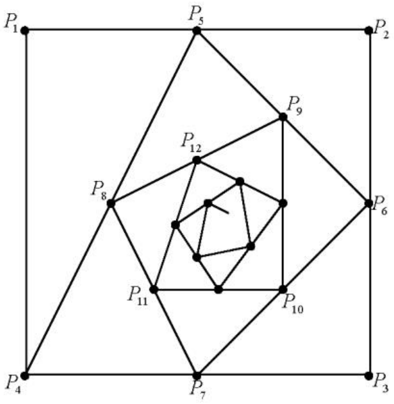
102 學年度台南區高級中學數學科能力競賽複賽試題（一）參考解答

1. 座標平面上四點$P_1(0,1)$, $P_2(1,1)$, $P_3(1,0)$, $P_4(0,0)$圍成一正方形。假設$P_5$為$P_1P_2$之中點，$P_6$為$P_2P_3$之中點，$P_7$是$P_3P_4$之中點。以此步驟繼續下去可生成一數列$\{P_n\}$(如圖所示)：




令$P_n$的座標為$(x_n, y_n)$，試求

$$(x_{500}+2x_{501}+2x_{502}+2x_{503})(2y_{504}+4y_{505}+4y_{506}+4y_{507})$$

之值。

**解**:依題意可知$P_n$為$P_{n-4}P_{n-3}$之中點$(n \geq 5)$,所以$x_n = \frac{1}{2}(x_{n-4}+x_{n-3})$ for $n \geq$

5

首先證明對於所有$n \in \mathbb{N}, \frac{1}{2}x_n + x_{n+1} + x_{n+2} + x_{n+3} = 2$

當$n = 1$時，$\frac{1}{2}x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = \frac{1}{2} \cdot 0 + 1 + 1 + 0 = 2$

假設當$n = k-1$時成立,亦即是$\frac{1}{2}x_{k-1} + x_k + x_{k+1} + x_{k+2} = 2$,則當$n = k$時,

$$\frac{1}{2}x_k + x_{k+1} + x_{k+2} + x_{k+3} = \frac{1}{2}x_k + x_{k+1} + x_{k+2} + \frac{1}{2}(x_{k+3-4} + x_{k+3-3})$$

$$= \frac{1}{2}x_{k-1} + x_k + x_{k+1} + x_{k+2} = 2$$

同理可證，對於所有$n \in \mathbb{N}$，$\frac{1}{2}y_n + y_{n+1} + y_{n+2} + y_{n+3} = \frac{3}{2}$

所以

$$(x_{500}+2x_{501}+2x_{502}+2x_{503})(2y_{504}+4y_{505}+4y_{506}+4y_{507}) = 4 \cdot 6 = 24$$

2. 設實數$a, b$滿足 $a+b=2$，試求$\sqrt{3a+1}+\sqrt{2b+\frac{1}{5}}$ 的最大值，並說明此時$a, b$之值。

**解**： 令 $\vec{u} = \left(\sqrt{a+\frac{1}{3}}, \sqrt{b+\frac{1}{10}}\right)$

$\vec{v}=\left(\sqrt{3},\sqrt{2}\right)$

則

$\left|\vec{u}\right|=\sqrt{a+\frac{1}{3}+b+\frac{1}{10}}=\sqrt{\frac{73}{30}}$

$\left|\vec{v}\right|=\sqrt{5}$

$\vec{u}\cdot\vec{v}=\sqrt{3a+1}+\sqrt{2b+\frac{1}{5}}$

$\because\ \vec{u}\cdot\vec{v}\le\left|\vec{u}\right|\left|\vec{v}\right|$

$\therefore\ \sqrt{3a+1}+\sqrt{2b+\frac{1}{5}}\le\sqrt{5}\cdot\sqrt{\frac{73}{30}}=\sqrt{\frac{73}{6}}$ ………………(*)

不等式(*)中等號成立

$\Leftrightarrow\quad \dfrac{\sqrt{a+\frac{1}{3}}}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{b+\frac{1}{10}}}{\sqrt{2}}$ ………………(**)

等式(**) 可化簡為 $a-\frac{3}{2}b=-\frac{11}{60}$

解 $\begin{cases} a+b=2 \\ a-\frac{3}{2}b=-\frac{11}{60} \end{cases}$ 可求得 $\begin{cases} a=\frac{169}{150} \\ b=\frac{131}{150} \end{cases}$

代入可計算出 $\sqrt{3a+1}+\sqrt{2b+\frac{1}{5}}=\sqrt{\frac{73}{6}}$

故當$(a,b)=\left(\frac{169}{150},\frac{131}{150}\right)$時，$\sqrt{3a+1}+\sqrt{2b+\frac{1}{5}}$ 有最大值$\sqrt{\frac{73}{6}}$

3. $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $D$ 是四邊形 $ABCD$ 的四個內角

證明： $\cos A+\cos B+\cos C+\cos D=4\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{C+A}{2}$

**證明**：$\cos A+\cos B=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$ ……………………………………………（1）

$\cos C+\cos D=2\cos\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2}=-2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{C-D}{2}$ ………………（2）

（1）（2）$\Rightarrow\cos A+\cos B+\cos C+\cos D=2\cos\frac{A+B}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}-\cos\frac{C-D}{2}\right)$

$=4\cos\dfrac{A+B}{2}\sin\dfrac{A+C-B-D}{4}\sin\dfrac{C+B-A-D}{4}$ ……………………………………（3）

$\sin\dfrac{A+C-B-D}{4}=\sin\dfrac{2A+2C-360^\circ}{4}=\sin\left(\dfrac{A+C}{2}-90^\circ\right)=-\cos\dfrac{A+C}{2}$ …….（4）

同理$\sin\dfrac{C+B-A-D}{4}=-\cos\dfrac{B+C}{2}$ ………………………………………. …….（5）

（1）（2）（3）（4）（5）$\Rightarrow \cos A+\cos B+\cos C+\cos D=$

$4\cos\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{B+C}{2}\cos\dfrac{C+B}{2}$

4. 設函數$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$對所有實數$x$和對所有大於$10^8$的實數$y$恆有

$$\left|f(x+2y)-2f(x+y)+f(x)\right|\le 0.2$$

試證明$f$對任意實數$x,y$恆滿足

$$\left|f(x+2y)-2f(x+y)+f(x)\right|\le 0.4$$

**證明**：由題意知對所有實數$x$和對所有大於$10^8$的實數$y$恆有

$$\left|f(x+2y)-2f(x+y)+f(x)\right|\le 0.2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

任意給定實數$x,y$

再取實數$H>10^8+|y|$

$\therefore H>10^8$，$H-y>10^8$ 和 $H+y>10^8$

(a) 在(1)中用$x+2y-H$取代$x$，用$H-y$取代$y$得

$$\left|f(x+H)-2f(x+y)+f(x+2y-H)\right|\le 0.2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

(b) 在(1)中用$x+2y-H$取代$x$，用$H$取代$y$得

$$\left|f(x+2y+H)-2f(x+2y)+f(x+2y-H)\right|\le 0.2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

(c) 由(2)(3)得

$$\left|2f(x+2y)-2f(x+y)-f(x+2y+H)+f(x+H)\right|$$

$$\le\left|f(x+H)-2f(x+y)+f(x+2y-H)\right|+\left|f(x+2y+H)-2f(x+2y)+f(x+2y-H)\right|$$

$$\le 0.4 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

(d) 在(1)中用$x-H$取代$x$，用$H+y$取代$y$得

$$\left|f(x+2y+H)-2f(x+y)+f(x-H)\right|\le 0.2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

(e) 在(1)中用 $x-H$ 取代 $x$，用 $H$ 取代 $y$ 得

$$\left|f(x+H)-2f(x)+f(x-H)\right| \le 0.2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

(f) 由(5)(6)得

$$\left|-2f(x+y)+2f(x)+f(x+2y+H)-f(x+H)\right|$$

$$\le \left|f(x+2y+H)-2f(x+y)+f(x-H)\right|+\left|f(x+H)-2f(x)+f(x-H)\right|$$

$$\le 0.4 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

(g) 由(4)(7)得

$$\begin{aligned}
&\left|2f(x+2y)-4f(x+y)+2f(x)\right| \\
&\le \left|2f(x+2y)-2f(x+y)-f(x+2y+H)+f(x+H)\right| \\
&+\left|-2f(x+y)+2f(x)+f(x+2y+H)-f(x+H)\right| \\
&\le 0.8
\end{aligned}$$

最後同 $\div 2$ 可得

$$\left|f(x+2y)-2f(x+y)+f(x)\right| \le 0.4$$

(h) 由 $x,y$ 的任意性知

$\left|f(x+2y)-2f(x+y)+f(x)\right| \le 0.4$ 對任意實數 $x,y$ 恆成立。