102 學年度台灣省北三區 (新竹高中)
高級中學數理及資訊學科能力競賽
數學科筆試 (二) 試題

編號：______________________ (學生自填)

注意事項：

1. 本試卷共七題填充題，滿分爲21分。
2. 考試時間：1 小時。
3. 試題及計算紙必須連同答案卷交回。
4. 將答案依序填寫在答案欄內。

問題：

1. 設 $\{a_n\}$ 為正數列，S_n 表示其前 n 項的和。若於任意的 k，a_k 與 2 的等差中項，等於 S_k 與 2 的等比中項，則 $a_{102} =$ ___(一)___。

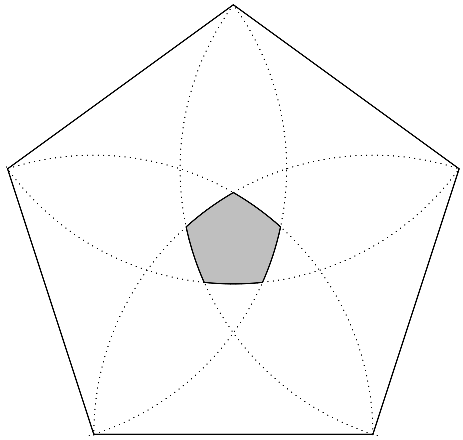
2. 連續投擲一公正的骰子，直到點數 1 出現 7 次才停止。若出現的點數 1 其前後出現的點數都不是 1 時，我們稱這種 1 點為「孤立 1」。例如：當投擲出現的點數依序為 1,2,1,1,5,4,1,6,6,1,1,1 時，其中投擲的第 1 次及第 7 次所出現的點數 1 都是「孤立 1」。設隨機變數 X 表示投擲中出現「孤立 1」的次數。則 X 的期望值為 ___(二)___。

3. 已知正數 x,y,z 滿足 $x^2+y^2+2z^2=10$，則 $\sqrt{xy}+3z$ 的最大值為 ___(三)___。

4. 設 $x=\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}$。則 $\dfrac{x^{10}+x^8+x^2+1}{x^{10}+x^6+x^4+1}$ 之值為 ___(四)___。(化簡為有理數)

(背面尚有試題)

5. 一個邊長為 1 的正五邊形內部，去掉同時與五頂點距離皆小於 1 的點後，也就是下圖中正五邊形去掉灰色區域以後，剩下的面積為 ___(五)___ 。



6. 設 $f(x)$ 為定義於所有有理數上的函數，且

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + xy$$

對所有有理數 x, y 皆成立。若 $f(4) = 14$，則 $f\left(\frac{1}{3}\right) =$ ___(六)___ 。

7. 設 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 為五項的非負實數數列，並且任意相鄰兩項的平方和皆小於或等於 1。則此數列總和的最大可能值為 ___(七)___ 。

(試題結束)