

102 學年度台灣省北三區(新竹高中)
高級中學數理及資訊學科能力競賽
數學科筆試(一) 試題

編號：_____ (學生自填)

注意事項：

1. 本試卷共四題計算證明題，滿分為49分。
2. 考試時間：2小時。
3. 試題及計算紙必須連同答案卷交回。
4. 將演算過程依序填寫在答案卷內。

問題一： 設 a, b 都是大於 1 的實數。試求 $\frac{a^2}{b-1} + \frac{b^2}{a-1}$ 的最小值。 (12分)

問題二： 銳角三角形 ABC 中， \overline{BD} 垂直 \overline{AC} 於 D 點，而 E 為 \overline{BD} 上一點。設 CE 交 AB 於 F 點， AE 交 BC 於 G 點。證明： $\angle FDB = \angle GDB$ 。 (12分)

問題三： 三角形 ABC 中，兩邊長為 $\overline{AB} = 17, \overline{AC} = 12$ 。設 D 是 $\triangle ABC$ 中相對於頂點 B 的旁切圓在 AC 邊上的切點，而 E 是 $\triangle ABC$ 中相對於頂點 C 的旁切圓在 AB 邊上的切點。

(1) 證明： $\overline{BE} = \overline{CD}$ 。

(2) 設 F 為 $\triangle ABC$ 的內切圓在 AC 邊上的切點。若 $\overline{DF} = 2$ ，試求 \overline{BC} 邊長。

(所謂三角形 ABC 相對於頂點 B 的旁切圓，指的是與 AC 邊相切、並且與邊 BA, BC 的延長線相切的圓。相對於頂點 C 的旁切圓可類似定義。)

(12分)

問題四： 設 $f(n)$ 表示正整數 n 所有正因數的乘積。試求所有滿足不等式

$$f(p^4 + 47) < (p^4 + 47)^{10}$$

的質數 p 。

(13分)