102 學年度北二區 (新竹高中)
高級中學數理及資訊學科能力競賽
(數學科口試參考答案)

【口試一】假設三個正實數 a、b、c 滿足 $(a^2+b^2+c^2)^2>2(a^4+b^4+c^4)$
試證：a、b、c 一定是某個三角形的三個邊長。

【解】 由假設

$$(a^2+b^2+c^2)^2-2(a^4+b^4+c^4)>0$$

得到

$$(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(b+c-a)>0$$

由於 a、b、c 都是正實數，除了 $a+b+c$ 是正數外其它三項中至少有兩項為正數，所以得到上述四項皆為正數，即

$$a+b>c\ ，a+c>b\ ，b+c>a$$

故 a、b、c 必是某三角形的三個邊長。 □

【口試二】設函數 f 對所有的正實數 m,n 均滿足 $f(mf(n))=nf(m)$，求 $f(1)$ 的值。

【證】 當 $m=n$ 時，我們有

$$f(xf(x))=xf(x) \quad \Longrightarrow \quad f(f(xf(x)))=f(xf(x))=xf(x)$$

代入 $x=1$，得到 $f(f(f(1)))=f(1)$。
現在令 $y=f(1)$，根據此式與題目條件則有

$$f(f(y))=f(1\cdot f(y))=y\cdot f(1)=f(1)\cdot f(1)$$

因此得到

$$f(f(f(1)))=f(1)^2$$

比較

$$\begin{cases} f(f(f(1))) &= f(1) \\ f(f(f(1))) &= f(1)^2 \end{cases}$$

可知 $f(1)^2=f(1)$，故 $f(1)=1$ 或 $f(1)=0$。 □