102 學年度北一區（花蓮高中）
高級中學數理及資訊學科能力競賽
數學科筆試（一）【參考解答】

問題一： 已知 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 為正數且 $\frac{1}{1+2x_1}+\frac{1}{1+2x_2}+\cdots+\frac{1}{1+2x_n}=1$，試證：

$$x_1x_2\cdots x_n \ge \left(\frac{n-1}{2}\right)^n$$ 。

【證明】：

設 $y_i=\frac{1}{1+2x_i}$, $1\le i\le n$

由 $y_1+\cdots+y_n=1$ 及算幾不等式，得

$1-y_i=\sum_{j\ne i} y_j \ge (n-1)\sqrt[n-1]{\prod_{j\ne i} y_j}$, $1\le i\le n$

將這 n 個不等式相乘，得

$(1-y_1)\cdots(1-y_n)\ge (n-1)^n \sqrt[n-1]{(y_1\cdots y_n)^{n-1}}=(n-1)^n y_1\cdots y_n$

$\Rightarrow \frac{1-y_1}{y_1}\cdot\frac{1-y_2}{y_2}\cdots\frac{1-y_n}{y_n}\ge (n-1)^n$

由 $\frac{1-y_i}{y_i}=2x_i$ ，得 $2^n(x_1x_2\cdots x_n)\ge (n-1)^n$

$\Rightarrow x_1x_2\cdots x_n \ge \left(\frac{n-1}{2}\right)^n$

問題二： 設 a, n 為正整數，找出所有數對 (a,n) ，使得 a^n+3^n 能整除 $a^{n+1}+2\cdot 3^n$ 。

【解答】：

(1) $n=1$ ：

$a+3$ 整除 $a^2+6=(a+3)(a-3)+15$

$\Leftrightarrow a+3$ 整除 15

$\Leftrightarrow a=2$, 12

$\therefore (2,1)$, $(12,1)$ 為解

(2) $n\ge 2$ ：

$a=1$時，$1+3^n<1+2\cdot 3^n<2\left(1+3^n\right)$

此時$1+3^n$不能整除$1+2\cdot 3^n$

$a=2$時，$\because 2^{n+1}+2\cdot 3^n=2\left(2^n+3^n\right)$

$\therefore \left(2,n\right)$為解

$a=3$時，$2\left(3^n+3^n\right)<3^{n+1}+2\cdot 3^n<3\left(3^n+3^n\right)$

$\therefore 3^n+3^n$不能整除$3^{n+1}+2\cdot 3^n$

$a\geq 4$時，先證：$a^n+3^{n+1}-3^n a>0$，即$\left(\frac{a}{3}\right)^n+3-a>0$

顯然$\left(\frac{a}{3}\right)^n+3-a>\left(\frac{a}{3}\right)^2+3-a>0$

當$n\geq 2$時上式成立。

因此$\left(a-1\right)\left(a^n+3^n\right)=a^{n+1}+3^n a-a^n-3^n<a^{n+1}+2\cdot 3^n<a\left(a^n+3^n\right)$

$\therefore a^n+3^n$不能整除$\mathrm{a}^{n+1}+2\cdot 3^n$

Ans：$\left(12,1\right)$及$\left(2,n\right)$，n為任意正整數

問題三： 設a,b,c,d為實數且$a\neq b,c\neq d$，$f(x),g(x)$為滿足$f(a)=f(b)$及$g(c)=g(d)$的實係數二次多項式。已知$f(x)-g(x)$為常數多項式，證明：

(1) $a+b=c+d$。

(2) $\dfrac{f(a)-f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{g(c)-g\left(\frac{c+d}{2}\right)}=\left(\dfrac{a-b}{c-d}\right)^2$。

【證明】：

(1) 依題意，可設$f(x)=r\left(x-a\right)\left(x-b\right)+s,g(x)=r'\left(x-c\right)\left(x-d\right)+s'$。

因為$f(x)-g(x)$是常數多項式，所以比較一、二次項係數知

$$r=r',r\left(a+b\right)=r'\left(c+d\right),$$

得$a+b=c+d$。

(2) 由$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=-r\frac{\left(a-b\right)^2}{4}+s=-r\frac{\left(a-b\right)^2}{4}+f(a)$得

$$r=\frac{4\left(f(a)-f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)}{(a-b)^2},$$

故得證。

註：1^{o} 也可利用對稱性知 $y=f(x)$ 的頂點之 x 軸坐標為 $\frac{a+b}{2}$，$y=g(x)$ 的頂點之 x 軸坐標為 $\frac{c+d}{2}$，而得證。

2^{o} 亦可用插值多項式證明。

問題四： 師大數學系舉辦系徽設計比賽，入圍決選的有四件作品，由 10 名學生代表進行不記名投票，每人投兩票，且兩票須投不同作品。在沒有廢票的情況下，試問：

(1) 四件作品的得票情形共有幾種？

(2) 得票數最高的作品恰有一件的票數分布有幾種？

【解答】：

(1) 由題意可以知道：

①四件作品所得的總票數為 20 票。

②每件作品最多可以得到 10 票。

令四件作品的得票數分別為 x,y,z,u，由①②可得

$$x+y+z+u=20, 0\le x,y,z,u\le 10 .$$

因為 $0\le x,y,z,u\le 10$，所以 H_{20}^{4} 須扣掉 $11\le x,y,z,u\le 20$ 的情況。由 $x+y+z+u=20$ 且 $x,y,z,u\ge 0$ 可知最多只有一個票數會大於等於 11，假設 $x\ge 11$，令 $x=x'+11$，可得

$$x'+y+z+u=9, 0\le x',y,z,u\le 9 ,$$

此情況有

$$H_{9}^{4}=C_{9}^{12}=220 \text{ 種。}$$

因此票數分布為

$$H_{20}^{4}-4\times H_{9}^{4}=1771-4\times 220=891 \text{ 種。}$$

(2) 假設得票數最高為 x，由題意可得

$$x+y+z+u=20, 0\le y,z,u<x\le 10 ,$$

因為 $y,z,u<x$ ，也就是 $y,z,u\le x-1$，所以

$$x+y+z+u\le x+(x-1)+(x-1)+(x-1)=4x-3 \ .$$

由 $x+y+z+u=20$ 得

$$20\le 4x-3\ ,$$

即

$$\frac{23}{4}\le x \ .$$

因此，當 $x\ge 6$ 時，才會滿足只有一件作品得票數最高且票數為 x。

當 $x=6$ 時，

$$y+z+u=14, 0\le y,z,u\le 5$$

滿足此情況的 y,z,u 有 $(5,5,4),(5,4,5),(4,5,5)$ 3 種。

當 $x=7$ 時，

$$y+z+u=13, 0\le y,z,u\le 6$$

因為 $y+z+u=13$ 且 $y,z,u\ge 0$ ，所以 y,z,u 最多只有一個會大於等於 7。

由(1)可知滿足此情況有

$$H_{13}^{3}-3\times H_{6}^{3}=C_{13}^{15}-3\times C_{6}^{8}=105-84=21 \text{種。}$$

同理

當 $x=8,9,10$ 時， y,z,u 最多只有一個會大於等於 8,9,10，故

當 $x=8$ 時，有

$$H_{12}^{3}-3\times H_{4}^{3}=C_{12}^{14}-3\times C_{4}^{6}=91-45=46 \text{ 種。}$$

當 $x=9$ 時，有

$$H_{11}^{3}-3\times H_{2}^{3}=C_{11}^{13}-3\times C_{2}^{4}=78-18=60 \text{ 種。}$$

當 $x=10$ 時，有

$$H_{10}^{3}-3\times H_{0}^{3}=C_{10}^{12}-3\times C_{0}^{2}=66-3=63 \text{種。}$$

因此滿足只有一件作品得票數最高的情形有

$$4\times(3+21+46+60+63)=772 \text{ 種。}$$