

102 學年度北一區（花蓮高中）
高級中學數理及資訊學科能力競賽
數學科筆試（一）試題

編號：_____（學生自填）

注意事項：

1. 本試卷共四題計算證明題，滿分為 46 分。
2. 考試時間：2 小時。
3. 試題及計算紙必須連同答案卷交回。
4. 將演算過程依序填寫在答案卷內。

問題一： 已知 x_1, x_2, \dots, x_n 為正數且 $\frac{1}{1+2x_1} + \frac{1}{1+2x_2} + \dots + \frac{1}{1+2x_n} = 1$ ，試證：

$$x_1 x_2 \cdots x_n \geq \left(\frac{n-1}{2}\right)^n。$$

(10 分)

問題二： 設 a, n 為正整數，找出所有數對 (a, n) ，使得 $a^n + 3^n$ 能整除 $a^{n+1} + 2 \cdot 3^n$ 。

(12 分)

問題三： 設 a, b, c, d 為實數且 $a \neq b, c \neq d$ ， $f(x), g(x)$ 為滿足 $f(a) = f(b)$ 及 $g(c) = g(d)$ 的實

係數二次多項式。已知 $f(x) - g(x)$ 為常數多項式，證明：

(1) $a + b = c + d$ 。 (4 分)

(2) $\frac{f(a) - f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{g(c) - g\left(\frac{c+d}{2}\right)} = \left(\frac{a-b}{c-d}\right)^2$ 。 (8 分)

問題四：師大數學系舉辦系徽設計比賽，入圍決選的有四件作品，由 10 名學生代表進行不記名投票，每人投兩票，且兩票須投不同作品。在沒有廢票的情況下，試問：

(1) 四件作品的得票情形共有幾種？ (4 分)

(2) 得票數最高的作品恰有一件的票數分布有幾種？ (8 分)