

一百零貳學年度高級中學數學科能力競賽複賽試題

南區（高雄區） 筆試（二）{參考解答}

一、是否存在三個正實數 x 、 y 、 z 滿足 $x < |y - z|$ ， $y < |x - z|$ ， $z < |x - y|$ 。

【參考解答】若存在，則 x 、 y 、 z 滿足 $x^2 < (y - z)^2$ ， $y^2 < (x - z)^2$ ， $z^2 < (x - y)^2$ 。

$$\text{亦即 } (x + y - z)(x - y + z) < 0,$$

$$(x + y - z)(-x + y + z) < 0,$$

$$(x - y + z)(-x + y + z) < 0。$$

三式相乘可得出 $(x + y - z)^2(x - y + z)^2(-x + y + z)^2 < 0$ ，不合。

二、設 $f(x)$ 為一個不為零的實函數。已知對任意實數 a, b 滿足 $f(ab) = af(b) + bf(a)$ 且 $f(6) = 6$ ，求 $f(6^{-6})$ 之值？

【參考解答】當 $ab \neq 0$

$$\frac{f(ab)}{ab} = \frac{f(b)}{b} + \frac{f(a)}{a}$$

$$\text{令 } h(x) = \frac{f(x)}{x}, \quad x \neq 0。 \quad h(ab) = h(a) + h(b)$$

$$\text{所以 } h(a^n) = nh(a), \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\text{故 } f(a^n) = a^n h(a^n) = a^n nh(a) = na^{n-1} f(a)$$

$$f(6^{-6}) = 6\left(\frac{1}{6}\right)^5 f\left(\frac{1}{6}\right) = -\left(\frac{1}{6}\right)^5$$

$$\text{因為 } f(1) = 2f(1), \text{ 所以 } f(1) = 0$$

$$0 = f(1) = \frac{1}{6} f(6) + 6f\left(\frac{1}{6}\right), \text{ 得 } f\left(\frac{1}{6}\right) = -\frac{1}{6}$$

三、設 a_1, a_2, \dots, a_n 均為正實數，已知 $\sum_{i=1}^n a_i^4 = 1$ ，試證 $\sum_{i=1}^n \frac{a_i^3}{1-a_i^3} \geq \frac{4 \times 2^{2/3}}{3}$ 。

【參考解答】

$$\begin{aligned} b-b^4 &= b(1-b^3) = \frac{\sqrt[3]{3b^3(1-b^3)^3}}{\sqrt[3]{3}} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{3}} \times \sqrt[3]{\left(\frac{3b^3+3(1-b^3)}{4}\right)^4} \\ &= \frac{1}{\sqrt[3]{3}} \times \sqrt[3]{\left(\frac{3}{4}\right)^4} = \frac{3}{4\sqrt[3]{4}} \end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i^3}{1-a_i^3} = \sum_{i=1}^n \frac{a_i^4}{a_i-a_i^4} \geq \frac{4 \times 2^{2/3}}{3} \sum_{i=1}^n a_i^4 = \frac{4 \times 2^{2/3}}{3}$$

四、求解函數 $f(x)$ ，滿足函數方程 $f\left(\frac{x-1}{x+1}\right) + f\left(-\frac{1}{x}\right) + f\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = x$ 。

【參考解答】：令 $g(x) = \frac{x-1}{x+1}$ ，則 $g^{(2)}(x) = g(g(x)) = -\frac{1}{x}$ ， $g^{(3)}(x) = \frac{1+x}{1-x}$ ， $g^{(4)}(x) = x$ 。

所以

$$\begin{cases} f(g(x)) + f(g^{(2)}(x)) + f(g^{(3)}(x)) = x \cdots \cdots (1) \\ f(g^{(2)}(x)) + f(g^{(3)}(x)) + f(x) = g(x) \cdots \cdots (2) \\ f(g^{(3)}(x)) + f(x) + f(g(x)) = g^{(2)}(x) \cdots \cdots (3) \\ f(x) + f(g(x)) + f(g^{(2)}(x)) = g^{(3)}(x) \cdots \cdots (4) \end{cases}$$

(2)+(3)+(4) - (1)*2 得到

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{3}(g(x) + g^{(2)}(x) + g^{(3)}(x) - 2x) \\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{x-1}{x+1} - \frac{1}{x} + \frac{1+x}{1-x} - 2x\right) \\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{(x-1)x(1-x)}{(x+1)x(1-x)} - \frac{(x+1)(1-x)}{(x+1)x(1-x)} + \frac{(1+x)^2x}{(x+1)x(1-x)} - 2x\right) \end{aligned}$$

化簡得 $f(x) = -\frac{2x^4 + 3x^2 - 1}{3x(x+1)(x-1)}$