

一百零貳學年度高級中學數學科能力競賽複賽試題

南區（高雄區）

筆試（二）

編號：_____

注意事項：

(1)時間分配：1小時

(2)本試卷共四題，滿分 21 分。第一題 5 分，第二題 5 分，第三題 5 分，第四題 6 分，

(3)將計算、證明過程依序寫在答案卷上。

(4)不可使用電算器。

(5)試題與答案卷一同繳回。

一、是否存在三個正實數 x 、 y 、 z 滿足 $x < |y - z|$ ， $y < |x - z|$ ， $z < |x - y|$ 。

二、設 $f(x)$ 為一個不為零的實函數。已知對任意實數 a, b 滿足 $f(ab) = af(b) + bf(a)$ 且 $f(6) = 6$ ，求 $f(6^{-6})$ 之值？

三、設 a_1, a_2, \dots, a_n 均為正實數，已知 $\sum_{i=1}^n a_i^4 = 1$ ，試證 $\sum_{i=1}^n \frac{a_i^3}{1 - a_i^3} \geq \frac{4 \times 2^{2/3}}{3}$

四、求解函數 $f(x)$ ，滿足函數方程 $f\left(\frac{x-1}{x+1}\right) + f\left(-\frac{1}{x}\right) + f\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = x$ 。