一百零貳學年度高級中學數學科能力競賽複賽試題

南區（高雄區）　　筆試（一）{參考解答}

一、設 m, n 均為正整數且滿足不等式 $\frac{6}{11}<\frac{3n}{3n+2m}<\frac{5}{9}$，若給予一個定數 n，則只有唯一的一個數 m，使得不等式成立，求 n 的最大數及最小數為何？

【參考解答】$\frac{6}{11}<\frac{3n}{3n+2m}<\frac{5}{9}$

$\frac{9}{5}<1+\frac{2m}{3n}<\frac{11}{6}$，$\frac{6}{5}n<m<\frac{5}{4}n$

$\frac{5}{4}n-\frac{6}{5}n\le 2$，所以 $n\le 40$

若 $n=40$，$48<m<50$，所以 $m=49$

代入 $n=9$，$\frac{54}{5}<m<\frac{45}{4}$，所以 $m=11$

故 n 的最大數為 40，最小數為 9

二、某運動會開了 n 天，共發出 m 面獎牌，其中 $n\ge 3$。第一天發出 2 面獎牌加上剩下獎牌的 $\frac{1}{5}$，第二天發出 4 面獎牌加上剩下獎牌的 $\frac{1}{5}$，第三天發出 6 面獎牌加上剩下獎牌的 $\frac{1}{5}$，以此類推，至最後的第 n 天發出的 $2n$ 面獎牌剛好將所有的獎牌全部發完。試問運動會共開了幾天？共發出了幾面獎牌？

【參考解答】設第 k 天共發出 a_k 面獎牌。

可知 $a_1=2+\frac{1}{5}(m-2)=\frac{1}{5}(m+8)$

$$a_k=2k+\frac{1}{5}(m-a_1-a_2-\cdots-a_{k-1}-2k)$$

$$a_{k+1}=2(k+1)+\frac{1}{5}(m-a_1-a_2-\cdots-a_k-2(k+1))$$

$$a_n=2n+\frac{1}{5}(m-a_1-a_2-\cdots-a_{n-1}-2n)=2n$$

相減可得 $a_{k+1}-a_k=2+\frac{1}{5}(-a_k-2)$，即 $a_{k+1}=\frac{4}{5}a_k+\frac{8}{5}$，$a_{k+1}-8=\frac{4}{5}(a_k-8)$。

所以 $a_k-8=\frac{4}{5}(a_{k-1}-8)=\left(\frac{4}{5}\right)^{k-1}(a_1-8)=\frac{1}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^{k-1}(m-32)$，

$$m = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \frac{1}{5}(m-32)\left(1+\left(\frac{4}{5}\right)+\left(\frac{4}{5}\right)^2+\cdots+\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}\right)+8n$$

$$=(m-32)\left(1-\left(\frac{4}{5}\right)^n\right)+8n \text{ 。}$$

解得 $m=\left(\frac{5}{4}\right)^n(8n-32)+32=\frac{5^n}{4^{n-1}}(2n-8)+32$ 。

因 m 為整數且 5^n 與 4^{n-1} 互質，可知 $4^{n-1} \mid 2n-8$ 。

若 $n \geq 3$，則 $4^{n-1} > |2n-8|$ 。可解得 $n=1, 2$ 或 4。

只有 $n=4$ 滿足條件，此時 $m=32$ 。

三、設 $f(x)=2x-\frac{1}{2}x^2$，令 $f(a)=a_1$，$0<a<4$，且 $f(a_n)=a_{n+1}$，$n=1, 2, 3, 4, \ldots..$

試證 $a_{n+1} \geq a_n$

【參考解答】 $f(x)=-\frac{1}{2}x(x-4)=-\frac{1}{2}(x-2)^2+2$

$f(0)=f(4)=0$， $f(x)$ 在 2 有最大值為 2

即 $0<x<4$，則 $0<f(x)\leq 2$

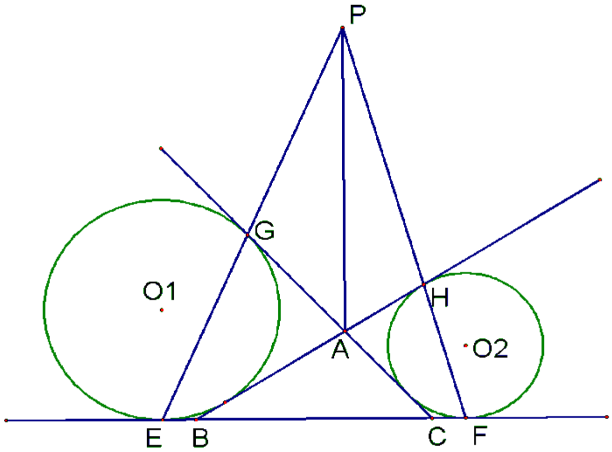
$f(a)=a_1$，$0<a<4$，所以 $0<a_1\leq 2$

$a_2=f(a_1)$，所以 $0<a_2\leq 2, \ldots\ldots\ldots, 0<a_n\leq 2, \ldots\ldots\ldots$

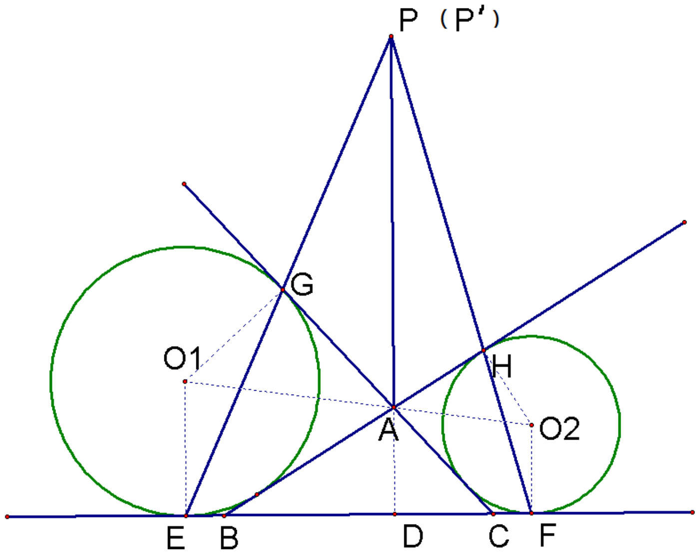
$$a_{n+1}-a_n=f(a_n)-a_n=-\frac{1}{2}a_n(a_n-4)-a_n$$

$$=-\frac{1}{2}a_n^2+a_n=\frac{1}{2}a_n(2-a_n)\geq 0$$

四、如右圖，圓 O_1 與圓 O_2 和 ΔABC 三邊所在的 3 條直線都相切，E, F, G, H 為切點，直線 EG 與直線 FH 交於點 P。求證: 直線 PA 垂直直線 BC。



【參考解答】



過 A 作 $AD \perp BC$ 於 D，延長 DA 交直線 HF 於點 P'，並作輔助線如圖：

觀察 ΔABD 及截線 FHP'，應用孟氏定理(Menelaus' theorem)得知

$$\frac{AH}{HB} \cdot \frac{BF}{FD} \cdot \frac{DP'}{P'A} = 1 \quad 。$$

因為 $BF = BH$（切線段等長），所以 $\dfrac{AH}{FD} \cdot \dfrac{DP'}{P'A} = 1$ ----------(*)。

因為 CG 和 BH 為外公切線段，所以 O_1，O_2, A 三點共線。

因為 CG 和 BH 為內公切線，所以 ΔAGO_1 相似 ΔAHO_2 。

因為 $AD \perp BC$，$O_1E \perp BC$，$O_2F \perp BC$，所以 O_1E 平行 O_2F 平行 AD。

$$\frac{DE}{DF} = \frac{O_1A}{O_2A} = \frac{AG}{AH} \Rightarrow \frac{AH}{FD} = \frac{AG}{ED}$$

又 $CE = CG$，則

$$(*) \Rightarrow 1 = \frac{AH}{FD} \cdot \frac{DP'}{P'A} = \frac{AG}{ED} \cdot \frac{DP'}{P'A} = \frac{AG}{ED} \cdot \frac{DP'}{P'A} \cdot \frac{CE}{CG} = \frac{AG}{CG} \cdot \frac{DP'}{P'A} \cdot \frac{CE}{DE} \quad 。$$

所以，觀察 ΔADC 應用孟氏定理的逆定理得 G, P', E 三點共線，

即 P' 為直線 EG 與直線 FH 交點，故 P' 與 P 重合，所以 $PA \perp BC$ 。