一百零貳學年度高級中學數學科能力競賽複賽試題

南區（高雄區）　　筆試（一）　　編號：________________

注意事項：

(1)時間分配：2 小時

(2)本試卷共四題，滿分 49 分。第一題 12 分，第二題 12 分，第三題 12 分，第四題 13 分。

(3)將計算、證明過程依序寫在答案卷上。

(4)不可使用電算器。

(5)試題與答案卷一同繳回。

一、設 m, n 均為正整數且滿足不等式 $\frac{6}{11} < \frac{3n}{3n+2m} < \frac{5}{9}$，若給予一個定數 n，則只有唯一的一個數 m，使得不等式成立，求 n 的最大數及最小數為何？

二、某運動會開了 n 天，共發出 m 面獎牌，其中 $n \geq 3$。第一天發出 2 面獎牌加上剩下獎牌的 $\frac{1}{5}$，第二天發出 4 面獎牌加上剩下獎牌的 $\frac{1}{5}$，第三天發出 6 面獎牌加上剩下獎牌的 $\frac{1}{5}$，以此類推，至最後的第 n 天發出的 $2n$ 面獎牌剛好將所有的獎牌全部發完。試問運動會共開了幾天？共發出了幾面獎牌？

三、設 $f(x) = 2x - \frac{1}{2}x^2$，令 $f(a) = a_1$，$0 < a < 4$，且 $f(a_n) = a_{n+1}$，$n = 1, 2, 3, 4, \ldots..$

試證 $a_{n+1} \geq a_n$

四、如右圖，圓 O_1 與圓 O_2 和 ΔABC 三邊所在的 3 條直線都相切，E, F, G, H 為切點，直線 EG 與直線 FH 交於點 P。

求證：直線 PA 垂直直線 BC。