

# 102 學年度高級中學數學學科能力競賽

## 嘉義區複賽試題 (一) 編號：\_\_\_\_\_

(時間二小時)

注意事項：

1. 本試卷共四題計算證明題，滿分為四十九分。
2. 請將答案寫在答案欄內，計算紙必須連同試卷交回。

---

一、在一個桌球單打友誼賽中，有若干隊參賽，每隊各含有若干名選手。根據比賽規則，不同隊的任兩位選手都須恰比賽一場，而同隊隊員間則互不比賽。已知總共有11名選手參賽且共舉行了46場比賽，請問共有幾隊？每隊各有多少人？

二、四邊形  $ABCD$  為圓內接四邊形，兩對角線  $AC$  和  $BD$  交於  $E$  點。令  $P, Q, R, S$  分別代表線段  $AB, BC, CD, DA$  的中點。試證： $\triangle EPS$  與  $\triangle EQR$  的外接圓的半徑相等。

三、已知  $a, b, c$  為正數且  $a^2 + b^2 + c^2 = 4$ 。試證： $\frac{a^{12}}{a^2 + bc} + \frac{b^{12}}{b^2 + ca} + \frac{c^{12}}{c^2 + ab} \geq 4$ 。

四、已知  $a_1, a_2, \dots, a_{100}$  為相異整數且滿足  $1 \leq a_1, a_2, \dots, a_{100} \leq 200$ 。假設對任意  $1 \leq i < j \leq 100$ ， $a_i + a_j \neq 201$  恆成立，且  $\sum_{i=1}^{100} a_i = 10080$ 。若  $a_1, a_2, \dots, a_{100}$  中恰有  $k$  個是奇數，試證： $k$  是4的倍數。