試題（二）參考解答

1. 試證明: $8888^{2222}+7777^{3333}$ 能被 37 整除。

【參考解答】 利用二項式定理證明，即

$$8888^{2222}+7777^{3333}=\left(8888^{2}\right)^{1111}+\left(7777^{3}\right)^{1111}$$

$$=\left(8888^{2}+7777^{3}\right)\left[\left(8888^{2}\right)^{1110}+\left(8888^{2}\right)^{1109}\cdot 7777^{3}+\cdots+\left(7777^{3}\right)^{1110}\right]$$

$$\because 8888^{2}+7777^{3}=\left(80\cdot 3\cdot 37+8\right)^{2}+\left(70\cdot 3\cdot 37+7\right)^{3}$$

$$=37\cdot M+64+37\cdot N+343=37\cdot K+37\cdot 11$$

$\therefore$ $8888^{2222}+7777^{3333}$ 能被 37 整除。

2. 若 a、b、c、d 、e 均為正整數，且$a+b+c+d+e=a\times b\times c\times d\times e$，試問$a^{2}+b^{2}+c^{2}+d^{2}+e^{2}$ 的最大可能的值為何？

【參考解答】

設 $1\le a\le b\le c\le d\le e$，

$5a\le a\times b\times c\times d\times e\le 5e \;\rightarrow\; a\times b\times c\times d \;\le\; 5 \;\le\; b\times c\times d\times e$

$\rightarrow d\le 5$， 分 **d=1,2,3,4,5** 討論；得

(a,b,c,d,e)可能的解共有三組：$(1,1,2,2,2)$、$(1,1,1,3,3)$、$(1,1,1,2,5)$。

故 $a^{2}+b^{2}+c^{2}+d^{2}+e^{2}$ 的最大可能值是 $\boxed{32}$ 。

3. 在ΔABC中，令 $\overline{BC}=a, \overline{CA}=b, \overline{AB}=c$，且$a,b,c$成等差數列，試求$\tan\dfrac{A}{2}\cdot\tan\dfrac{C}{2}$ 的值。

【參考解答】

因為 $a+c=2b$ ，由正弦定理知$\sin A+\sin C=2\sin B$ 。因此，利用和差化積公式

$$2\sin\frac{A+C}{2}\cdot\cos\frac{A-C}{2}=4\sin\frac{B}{2}\cdot\cos\frac{B}{2}=4\sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{A+C}{2}$$

$$\Rightarrow \sin\frac{A+C}{2}[\cos\frac{A-C}{2}-2\sin\frac{B}{2}]=0$$

$$\Rightarrow \cos\frac{B}{2}[\cos\frac{A-C}{2}-2\sin\frac{B}{2}]=0,\ \because \cos\frac{B}{2}>0,$$

$$\therefore \cos\frac{A-C}{2}=2\sin\frac{B}{2}=2\cos\frac{A+C}{2}$$

$$\cos\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{C}{2}+\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}=2\cos\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{C}{2}-2\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}$$

$$\therefore \cos\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{C}{2}=3\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}\Rightarrow \tan\frac{A}{2}\cdot\tan\frac{A}{2}=\frac{1}{3}$$

4. 已知 ΔABC 的面積是 $\frac{1}{4}$，其外接圓半徑為 1，且 a、b、c 為 ΔABC 的三邊長，試證： $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}>\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$ 。

【參考解法】 $\frac{1}{4}=\Delta ABC=\frac{abc}{4R}=\frac{abc}{4}\quad\rightarrow\quad abc=1$ ，

$$\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2}\geq\frac{1}{\sqrt{ab}}=\sqrt{c}\quad \ldots(1)$$

$$\frac{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}{2}\geq\frac{1}{\sqrt{bc}}=\sqrt{a}\quad \ldots(2)$$

$$\frac{\frac{1}{c}+\frac{1}{a}}{2}\geq\frac{1}{\sqrt{ca}}=\sqrt{b}\quad \ldots(3)$$

（1）＋（2）＋（3）得 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$ ，

但上式等號成立 $\Leftrightarrow$ $a=b=c$ **，則** $\Delta ABC=\frac{\sqrt{3}}{4}\neq\frac{1}{4}$ **（不合）**

故 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} > \sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$ 。

5. 設 $0\leq\theta\leq 360^\circ$ **，試求滿足不等式** $\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\theta<\sqrt{1+\sin\theta}-\sqrt{1-\sin\theta}$ **的** θ **之範圍。**

【參考解法】

case1. 當 $\sin\theta = \mathbf{0}$，$\frac{2}{\sqrt{3}}\sin 0 = 0 < \sqrt{1+\sin 0} - \sqrt{1-\sin 0} = 0$（不合）

Case2. 當 $\sin\theta > \mathbf{0}$，$\mathbf{0} < \frac{2}{\sqrt{3}}\sin\theta < \sqrt{1+\sin\theta} - \sqrt{1-\sin\theta}$ ，兩邊平方後得

$\Rightarrow \frac{4}{3}\sin^2\theta < 2 - 2\sqrt{\cos^2\theta} \Rightarrow 2\left(1-\cos^2\theta\right) < 3 - 3\sqrt{\cos^2\theta}$

$\Rightarrow 0 < 2\cos^2\theta - 3|\cos\theta| + 1 = \left(1-|\cos\theta|\right)\left(1-2|\cos\theta|\right)$

$\Rightarrow \mathbf{1} < |\cos\theta|$（不合）或 $|\cos\theta| < \frac{1}{2} \Rightarrow 60^\circ < \theta < 120^\circ$

Case3. 當 $\sin\theta < \mathbf{0}$，

$\frac{2}{\sqrt{3}}\left(-\sin\theta\right) > \sqrt{1+\sin\theta} - \sqrt{1-\sin\theta} > 0$ ，$1 - \sin\theta - 2\sqrt{1-\sin^2\theta} + 1 + \sin\theta < \frac{4}{3}\sin^2\theta$

$\Rightarrow \left(|\cos\theta| - 1\right)\left(2|\cos\theta| - 1\right) < \mathbf{0}$

$\Rightarrow \frac{1}{2} < |\cos\theta| < 1$

$\Rightarrow 180^\circ < \theta < 240^\circ$ 或 $300^\circ < \theta < 360^\circ$

由 **case1,2,3** $\Rightarrow 60^\circ < \theta < 120^\circ$ 、$180^\circ < \theta < 240^\circ$ 或 $300^\circ < \theta < 360^\circ$