

102 學年度高屏區高級中學數學科能力競賽試題 (二)

注意事項：(1) 作答時間：1 小時。不可使用電算器。

(2) 本試卷共五題，滿分 21 分。每題配分標於題末。請將計算及證明題演算過程或理由，依序寫在答案卷上。

(3) 試題紙與答案卷請一併繳回。

1. 試證明： $8888^{2222} + 7777^{3333}$ 能被 37 整除。 (4 分)

2. 若 a 、 b 、 c 、 d 、 e 均為正整數，且 $a+b+c+d+e = a \times b \times c \times d \times e$ ，
試問 $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2$ 的最大可能的值為何？ (4 分)

3. 在 $\triangle ABC$ 中，令 $\overline{BC} = a$ ， $\overline{CA} = b$ ， $\overline{AB} = c$ ，且 a, b, c 成等差數列，試求 $\tan \frac{A}{2} \cdot \tan \frac{C}{2}$ 的值。
(5 分)

4. 已知 $\triangle ABC$ 的面積是 $\frac{1}{4}$ ，其外接圓半徑為 1，且 a 、 b 、 c 為 $\triangle ABC$ 的三邊長，試證： $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} > \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$ 。 (4 分)

5. 設 $0 \leq \theta \leq 360^\circ$ ，試求滿足不等式 $\frac{2}{\sqrt{3}} \sin \theta < \sqrt{1 + \sin \theta} - \sqrt{1 - \sin \theta}$ 的 θ 之範圍。
(4 分)