試題（一）參考解答

1. 設 $\sin\alpha-\sin\beta=\dfrac{1}{2}$、$\cos\alpha-\cos\beta=-\dfrac{2}{3}$，求 $\cos(\alpha+\beta)$ 的值。

【參考解答】 設 $x_1=\cos\alpha$、$y_1=\sin\alpha$、$x_2=\cos\beta$、$y_2=\sin\beta$，

則點 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$ 在單位圓 $x^2+y^2=1$ 上。

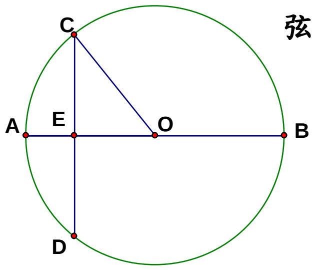
又 $\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\dfrac{\sin\beta-\sin\alpha}{\cos\beta-\cos\alpha}=\dfrac{-1/2}{2/3}=-\dfrac{3}{4}$，

因此令直線 AB 的方程式為 $y=-\dfrac{3}{4}x+b$。

現在將 $y=-\dfrac{3}{4}x+b$ 代入 $x^2+y^2=1$，得 $\dfrac{25}{16}x^2-\dfrac{3b}{2}x+(b^2-1)=0$，由根與係數關係可得 $x_1x_2=\dfrac{16(b^2-1)}{25}$。 同理，可得 $y_1y_2=\dfrac{16b^2-9}{25}$。

所以，$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta=x_1x_2-y_1y_2=-\dfrac{7}{25}$。

2. 已知一圓的圓心為 O 點，且 $\overline{AB}$ 為此圓的直徑，如果 $\overline{CD}$ 為一弦且垂直 $\overline{AB}$ 於 E 點，又 $\overline{AB}$ 的長度為二位整數，$\overline{CD}$ 的長度正好是此二位數的個位數字與十位數字互換位置，且 $\overline{OE}$ 的長度為正有理數，試求 $\overline{AB}$ 的長度。



【參考解答】：令 $\overline{AB}=10a+b$，其中 a,b 為異於 **0** 的數字。

所以 $\overline{CD}=10b+a$，本題欲求 a,b 值，使得 $\overline{OE}$ 的長度為正有理數。

在直角三角形 CEO 中，

$$\overline{OE}=\sqrt{\overline{OC}^2-\overline{CE}^2}=\frac{1}{2}\sqrt{(10a+b)^2-(10b+a)^2}=\frac{3}{2}\sqrt{11(a^2-b^2)}$$

因此，當 $11(a^2-b^2)$ 為完全平方數時，$\overline{OE}$ 的長度為正有理數。

令 $a^2-b^2=11n^2 \Rightarrow (a,b)=(6,5)$ 滿足題意。

3. 在 ΔABC 中，令 $\overline{BC}=a$、$\overline{AB}=c$、$\overline{AC}=b$ 且 $s=\dfrac{a+b+c}{2}$，

試證：$a\cos A+b\cos B+c\cos C=\dfrac{8s(s-a)(s-b)(s-c)}{abc}$。

【參考解答】：$a\cos A+b\cos B+c\cos C$

$$=a\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+b\cdot\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}+c\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

$$=\frac{1}{2abc}\left[a^2(b^2+c^2-a^2)+b^2(c^2+a^2-b^2)+c^2(a^2+b^2-c^2)\right]$$

$= \dfrac{1}{2abc}\left[16s(s-a)(s-b)(s-c)\right]$

$= \dfrac{8s(s-a)(s-b)(s-c)}{abc}$

4.已知正實數a, b, c **滿足**$a^2+b^2+c^2=3$**，試證：**

$$\frac{1}{1+2ab}+\frac{1}{1+2bc}+\frac{1}{1+2ca}\geq 1 \quad 。$$

【參考解答】

將上式不等式兩邊同乘以$(1+2ab)(1+2bc)(1+2ca)$**，因此上式成立**

$\Leftrightarrow 1+ab+bc+ca\geq 4a^2b^2c^2$ **。由題意知**

$a^2+b^2+c^2=3 \Rightarrow 1=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{3}\geq \sqrt[3]{a^2b^2c^2} \Rightarrow abc\leq 1$

$\because a^2b^2c^2=(abc)^2\leq \sqrt{abc}, \quad \therefore \dfrac{1+ab+bc+ca}{4}\geq \sqrt[4]{a^2b^2c^2}=\sqrt{abc}\geq a^2b^2c^2$

故得證。

5. 已知 $f(x)$ **為** n **次多項式，其各項的係數都是非負的整數，如果** $f(1)=6$**，**$f(7)=3438$**，試求**n**之值及** $f(2)$ **。**

【參考解答】 設 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$ **，**$\because$ $f(1)=6$ **，**

得知係數 $a_0, a_1, ..., a_{n-1}, a_n \in \{0,1,2,3,4,5,6\}$ **，**

又 $f(7)=a_n7^n+a_{n-1}7^{n-1}+...+a_17+a_0=3438$ **……（A），**

將 3438 **表成** 7 **進位數** $\rightarrow$ $3438=1\times 7^4+3\times 7^3+1\times 7+1$ **……（B），**

（A）、（B）兩式比較得： $f(x)=x^4+3x^3+x+1 \quad \rightarrow \quad \boxed{f(2)=43}$ **。**

註：因為$3438=f(7)=a_n7^n+a_{n-1}7^{n-1}+...+a_17+a_0\geq a_n7^n \Rightarrow n\leq 4$ **，**

如果$n=3\Rightarrow$

$3438=f(7)=a_3\times 7^3+a_2\times 7^2+a_1\times 7+a_0\leq 6\times 7^3+6\times 7^2+6\times 7+6=2400$ **(不合)**

因此$n=4$ **。**