

102 學年度高屏區高級中學數學科能力競賽試題 (一)

注意事項：(1) 作答時間：2 小時。不可使用電算器。

(2) 本試卷共五題，滿分 49 分。每題配分標於題末。計算、證明題請務必依序寫在答案卷上。同時必須寫出演算過程或理由。

(3) 試題紙與答案卷請一併繳回。

1. 設 $\sin \alpha - \sin \beta = \frac{1}{2}$ 、 $\cos \alpha - \cos \beta = -\frac{2}{3}$ ，試求 $\cos(\alpha + \beta)$ 的值。

(9 分)

2. 已知一圓的圓心為 O 點，且 \overline{AB} 為此圓的直徑，如果 \overline{CD} 為一弦且垂直 \overline{AB} 於 E 點，又 \overline{AB} 的長度為二位整數， \overline{CD} 的長度正好是此二位數的個位數字與十位數字互換位置，且 OE 的長度為正有理數，試求 \overline{AB} 的長度。(10 分)

3. 在 $\triangle ABC$ 中，令 $\overline{BC} = a$ 、 $\overline{AB} = c$ 、 $\overline{AC} = b$ 且 $s = \frac{a+b+c}{2}$ ，

試證： $a \cos A + b \cos B + c \cos C = \frac{8s(s-a)(s-b)(s-c)}{abc}$ 。(10 分)

4. 已知正實數 a, b, c 滿足 $a^2 + b^2 + c^2 = 3$ ，試證：

$$\frac{1}{1+2ab} + \frac{1}{1+2bc} + \frac{1}{1+2ca} \geq 1 \quad (10 \text{ 分})$$

5. 已知 $f(x)$ 為 n 次多項式，其各項的係數都是非負的整數，如果 $f(1) = 6$ ， $f(7) = 3438$ ，試求 n 之值及 $f(2)$ 。(10 分)