教育部 101 學年度高級中學數學競賽

台中區複賽試題（一）【參考解答】

一、【解】

$$\sum_{n=1}^{67}\frac{(-1)^{n+1}}{n}=\sum_{n=1}^{67}\frac{1}{n}-2\sum_{n=1}^{33}\frac{1}{2n}=\sum_{n=1}^{33}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n}\right)+\sum_{n=34}^{67}\frac{1}{n}$$
$$=\sum_{n=34}^{50}\frac{1}{n}+\sum_{n=51}^{67}\frac{1}{n}=\sum_{n=34}^{50}\frac{1}{n}+\sum_{n=34}^{50}\frac{1}{101-n}=\sum_{n=34}^{50}\frac{101}{n(101-n)}$$

因 101 是質數，且分母的因子都小於 101，故通分後化為最簡分數的分子仍為 101 的倍數。

二、【解】

假設 $p(x)$ 有一整數根 r，那麼 $p(x)=(x-r)g(x)$，其中 $g(x)$ 也為一整數係多項式，又 $r=s+kt$， 其中 $s,\ \mathrm{t}\in\mathbb{Z}$ 且 $1\le s\le k$ 但 $p(s)=(s-r)g(s)=-ktg(s)$，因此 $p(s)$ 可被 k 除盡，矛盾！

三、【解】

令 $f_i(n,m)$ 為這種數字串中尾數為 $i=0,1$ 的個數。則

1.
$$\begin{aligned}f_0(n,m)&=f_0(n-1,m)+f_1(n-1,m),\\ f_1(n,m)&=f_0(n-1,m-1)+f_1(n-1,m).\end{aligned}$$

今以歸納法證明 $f_0(n,m)=\binom{n}{2m+1}$， $f_1(n,m)=\binom{n}{2m}$。

當 $n+m=1,2$ 時，等式成立。

設 $n+m<k$ 時等式成立，則當 $n+m=k$ 時

$$f_0(n,m)=f_0(n-1,m)+f_1(n-1,m)=\binom{n-1}{2m+1}+\binom{n-1}{2m}=\binom{n}{2m+1},$$

$$f_1(n,m)=f_0(n-1,m-1)+f_1(n-1,m)=\binom{n-1}{2m-1}+\binom{n-1}{2m}=\binom{n}{2m}.$$

四、【解】

令 $\lambda_n=\dfrac{a_n-\sqrt{7}}{a_n+\sqrt{7}}$ ，則

$$\lambda_{n+1}=\frac{a_{n+1}-\sqrt{7}}{a_{n+1}+\sqrt{7}}=\frac{a_n+\dfrac{7}{a_n}-2\sqrt{7}}{a_n+\dfrac{7}{a_n}+2\sqrt{7}}=\left(\frac{a_n-\sqrt{7}}{a_n+\sqrt{7}}\right)^2=\lambda_n^2$$

因此，我們可以得到 $a_n>\sqrt{7}\ (\mathrm{n}\geq 2)$ 及 $\lambda_{10}=\lambda_9^2=\lambda_8^4=\cdots=\lambda_1^{2^9}$ 或

$$\frac{a_{10}-\sqrt{7}}{a_{10}+\sqrt{7}}=\left(\frac{3-\sqrt{7}}{3+\sqrt{7}}\right)^{512}\ 。$$

利用數學歸納法可以證明 $a_n\leq 3;\ n=1,\ 2,\ 3....,\ 10$ ，明顯 $a_1\leq 3$ 成立。

若 $n=k\geq 1$，有 $a_k\leq 3$ ，則

$$a_{k+1}=\frac{1}{2}(a_k+\frac{7}{a_k})\leq\frac{1}{2}(3+\frac{7}{\sqrt{7}})\leq 3\ 。$$

因此，

$$(a_{10}-\sqrt{7})\leq(3+\sqrt{7})\left(\frac{3-\sqrt{7}}{3+\sqrt{7}}\right)^{512}\leq 6\left(\frac{1}{8+3\sqrt{7}}\right)^{512}\cdots\cdots(*)$$

因為

$$\begin{aligned}(8+3\sqrt{7})^3&=2024+765\sqrt{7}\geq 4000\ ,\\(8+3\sqrt{7})^{512}&=(8+3\sqrt{7})^2(8+3\sqrt{7})^{510}\\&\geq(8+3\sqrt{7})^2(4000)^{170}\\&\geq(250)\cdot 2^{340}10^{510}\geq(25)10^{613}\end{aligned}$$

由不等式（$*$）得

$$(a_{10}-\sqrt{7})\leq\frac{6}{25}10^{-613}<10^{-613}\ 。$$

五、【證】

延長 QR 與圓 O 交於另一點 M，先證 M 為不含點 A 的弧 BC 的中點，即 QR 為 $\angle BRC$ 的分角線。作過點 R 對圓 K（亦為對圓 O）的切線，交 BC 於 S。則 $\angle SRC = \angle RBC$，$\angle SRQ = \angle SQR$。因此

2.

$$\angle CRQ = \angle SRQ - \angle SRC = \angle SQR - \angle RBC = \angle BRQ$$。

同理 PR 平分 $\angle ARB$。故得證。