教育部 101 學年度高級中學數學競賽

台中區複賽試題（一）　　編號：______

（時間二小時）

注意事項：

1.本試卷共五題**計算證明題**，滿分為四十九分。

2.請將答案寫在答案欄內，計算紙必須連同試卷交回。

一、證明 $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{67}$ 化為最簡分數後，分子可被 101 整除。

(9 分)

二、設 $P(x)$ 為一整係數多項式，且存在一正整數 k 使得整數

(10 分) $P(1), P(2), \ldots, P(k)$ 皆不可被 k 整除，試證 $P(x)=0$ 無整數根。

三、考慮由 n 個 0, 1 組成且 01 剛好出現 m 次的數字串（如 10110101

(10 分) 是由 8 個 0, 1 組成，且 01 剛好出現 3 次的數字串）。令 $f(n,m)$ 為所有這種數字串的個數。證明

$$f(n,m)=\binom{n+1}{2m+1}\text{。}$$

四、設 $a_1=3,\ a_n=\frac{1}{2}\left(a_{n-1}+\frac{7}{a_{n-1}}\right)$，其中 $n=2,\ 3,\ \ldots.,\ 10$。證明

(10 分)

$$0<a_{10}-\sqrt{7}<10^{-613}\text{。}$$

五、 ΔABC 的外接圓為 O，D 為 BC 邊上一點，圓 K 與線段

(10 分) $AD,\ DC$ 及圓 O 相切（圓 K 在線段 $AD,\ DC$ 及劣弧 AC 所圍的區域內），切點分別為 $P,\ Q$ 及 R。證明 $\angle PRQ=\frac{\angle A+\angle C}{2}$。