台北市 101 學年度
高級中學數理及資訊學科能力競賽
數學科筆試(一)【參考解答】

【問題一】設 $r \ge s \ge t \ge u \ge 0$ 且滿足 $5r+4s+3t+6u=2012$。試求 $r+s+t+u$ 的最大值與最小值。

（12 分）

解：

【參考解答】：令

$$u+a=t, \qquad (1)$$

$$u+a+b=s, \qquad (2)$$

$$u+a+b+c=r, \qquad (3)$$

其中 $a,\ b,\ c$ 為非負實數.

$$r+t+s+u=4u+3a+2b+c. \qquad (4)$$

將(1), (2), (3)代入

$$5r+4s+3t+6u=2012 \qquad (5)$$

可得 $18u+12a+9b+5c=2012 \ \Rightarrow\ (2u+b+c)+4(r+s+t+u)=2012$.

顯然要使得 $r+s+t+u$ 的值最大，等價於使得 $2u+b+c$ 的值最小，所以可考慮 $u=b=c=0$，此時 $4(r+s+t+u)=20$，即 $r+s+t+u$ 的最大值為 503（$r=s=t=\frac{503}{3}$，$u=0$ 時，有最大值 503).

現在考慮 $r+s+t+u$ 的最小值. 由於 $18u+12a+9b+5c=2012$，我們可得

$$5(r+s+t+u)-(2u+3a+b)=2012.$$

顯然要使得 $r+s+t+u$ 的值最小，等價於要使得 $2u+3a+b$ 的值最小，所以可取 $u=a=b=0$，此時可得 $5(r+s+t+u)=2012$，即 $r+s+t+u$ 的最小值為 $\frac{2012}{5}$ 或 402.4（$r=s=t=\frac{2012}{15}$，$u=0$ 時，有最小值 $\frac{2012}{5}$ 或 402.4).

【問題二】(1) 設 $\{a_k\}$ 是各項均不為零的等差數列。試證:對於每一個大於 1 的正整數 n，下式恆成立:

$$\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\cdots+\frac{1}{a_{n-1}a_n}=\frac{n-1}{a_1a_n}\ 。$$

（6 分）

(2) 設 $\{a_k\}$ 是各項均不為零的實數數列，且對於每一個大於 1 的正整數 n，上式恆成立。試證: $\{a_k\}$ 必為等差數列。

（7 分）

解：

（1）依題意可設 $a_k = a_1 + (k-1)d,\quad k = 2,3,...,n$, 所以有

$$\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\cdots+\frac{1}{a_{n-1}a_n}$$

$$=\frac{1}{d}\left[\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}\right]+\frac{1}{d}\left[\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}\right]+\cdots+\frac{1}{d}\left[\frac{1}{a_{n-1}}-\frac{1}{a_n}\right]$$

$$=\frac{1}{d}\left[\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_n}\right]$$

$$=\frac{a_n-a_1}{d(a_1-a_n)}$$

$$=\frac{n-1}{a_1a_n}$$

故得證。

（2）我們將利用數學歸納法證明此部分。

當 $n=3$ 時，$\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}=\frac{2}{a_1a_3} \Rightarrow a_1+a_3=2a_2$，

所以 $a_1,\ a_2,\ a_3$ 成等差數列。

假設當 $n=k$ 時，$a_1,\ a_2,\ \cdots a_k$ 成等差數列且公差為 d。

當 $n=k+1$ 時，我們有

$$\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\cdots+\frac{1}{a_ka_{k+1}}=\frac{k}{a_1a_{k+1}} \qquad (6)$$

$$\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\cdots+\frac{1}{a_{k-1}a_k}=\frac{k-1}{a_1a_k} \qquad (7)$$

將(6)−(7)得到

$$\frac{1}{a_ka_{k+1}}=\frac{k}{a_1a_{k+1}}-\frac{k-1}{a_1a_k}=\frac{ka_k-(k-1)a_{k+1}}{a_1a_ka_{k+1}}$$

化簡上式可知

$$a_1 = ka_k-(k-1)a_{k+1}$$

$$\Leftrightarrow (k-1)a_{k+1}=ka_k-a_1=k\left[a_1+(k-1)d\right]-a_1=(k-1)(a_1+kd)$$

$$\Leftrightarrow a_{k+1}=a_1+kd$$

故 $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_k,\ a_{k+1}$ 成等差數列。

【問題三】假設某公司連續 n 個月的營收都是正成長，其月增率分別為 $a_1, a_2, \cdots, a_n$，這 n 個月的平均月增率為 $P=\sqrt[n]{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)}-1$，而算術平均數 A 與幾何平均數 G 分別為 $A=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k$, $G=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$ 。

試證：$A \ge P \ge G$。　（12 分）

解：

（1）$A \ge P \iff A+1 \ge \sqrt[n]{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)}$

其中 $A+1 = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k + 1 = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(1+a_k)$

$$\iff \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(1+a_k) \ge \sqrt[n]{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)}$$。

（2）$P \ge G \iff (1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n) \ge (1+G)^n$，其中

$$(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n) = 1 + \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i<j} a_i a_j + \sum_{i<j<k} a_i a_j a_k + \cdots + a_1 a_2 \cdots a_n$$

。

若令 $S_0 = 1, S_1 = \sum_{i=1}^{n} a_i, S_2 = \sum_{i<j} a_i a_j, S_3 = \sum_{i<j<k} a_i a_j a_k, \cdots, S_n = a_1 a_2 \cdots a_n$，則

$$\frac{S_k}{C_k^n} = \frac{\sum_{i_1<i_2<\cdots<i_k} a_{i_1} a_{i_2} \cdots a_{i_k}}{C_k^n} \ge G^k \quad (k = 0, 1, 2, \cdots, n)，$$

例如：

$$\frac{S_2}{C_2^n} = \frac{\sum_{i<j} a_i a_j}{C_2^n} = \frac{a_1a_2 + a_1a_3 + \cdots + a_{n-1}a_n}{\frac{n(n-1)}{2}} \ge \sqrt[\frac{n(n-1)}{2}]{a_1^{\,n-1} a_2^{\,n-1} \cdots a_n^{\,n-1}} = G^2$$

。

$$\frac{S_3}{C_3^n} = \frac{\sum_{i<j<k} a_i a_j a_k}{C_3^n} = \frac{a_1a_2a_3 + a_1a_2a_4 + \cdots + a_{n-2}a_{n-1}a_n}{\frac{n(n-1)(n-2)}{6}}$$

$$\ge \sqrt[\frac{n(n-1)(n-2)}{6}]{a_1^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} a_2^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} \cdots a_n^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}} = G^3$$

因此，$S_k \ge C_k^n \cdot G^k \quad (k = 0, 1, 2, \cdots, n)$，於是，

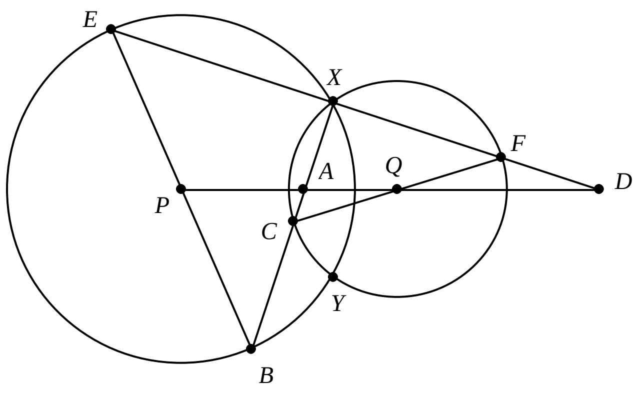
$$S_0 + S_1 + \cdots + S_n \ge C_0^n \cdot G^0 + C_1^n \cdot G^1 + C_2^n \cdot G^2 + \cdots + C_n^n \cdot G^n = (1+G)^n$$

。

【問題四】如圖，設圓 P 與圓 Q 相交於兩點 X 與 Y，過點 X 作一對垂直線。若其中一直線與連心線 PQ、圓 P、圓 Q 分別交於點 A、B、C，另一直線與連心線 PQ、圓 P、圓 Q 分別交於點 D、E、F 且點 A、B、C、D、E、F、X、Y 均相異。

試證：

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{DE}}{\overline{DF}}\text{。}\qquad\qquad\text{（12 分）}$$



解：

證 1：因為直線 ABC 與直線 DEF 垂直，所以，$\overline{BE}$ 通過圓心 P 且 $\overline{CF}$ 通過圓心 Q。

若直線 BF 與連心線 PQ 平行，則在△BCF 中，因為點 Q 是 $\overline{CF}$ 的中點而點 A 是連心線 PQ 與直線 BC 的交點，所以，點 A 是 $\overline{BC}$ 的中點，即 $\overline{AB}=\overline{AC}$。另一方面，在△$BEF$ 中，因為點 P 是 $\overline{BE}$ 的中點而點 D 是連心線 PQ 與直線 EF 的交點，所以，點 D 是 $\overline{EF}$ 的中點，即 $\overline{DE}=\overline{DF}$。

設直線 BF 與連心線 PQ 交於一點 R。

設過點 C 而與連心線 PQ 平行的直線交直線 BF 於點 G。在△FCG 中，因為 $\overline{QR}$ 與 $\overline{CG}$ 平行而點 Q 是 $\overline{CF}$ 的中點，所以，點 R 是 $\overline{FG}$ 的中點，亦即：$\overline{FR}=\overline{GR}$。其次，在△$BAR$ 中，因為 $\overline{CG}$ 與 $\overline{AR}$ 平行，所以，可知 $\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{BR}:\overline{GR}$。將前一等式代入後一等式，即得

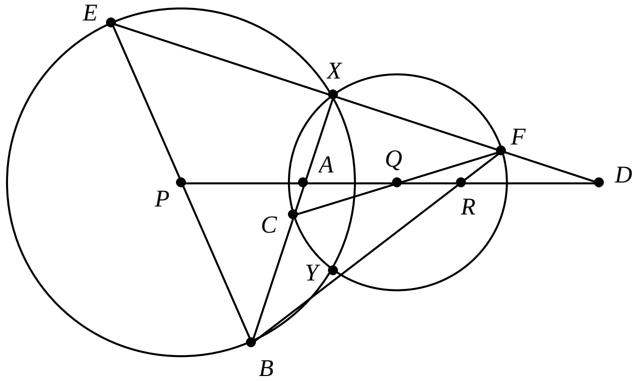
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{BR}}{\overline{FR}}\text{。}$$

設過點 B 而與連心線 PQ 平行的直線交直線 EF 於點 H。在△EBH 中，因為 $\overline{PD}$ 與 $\overline{BH}$ 平行而點 P 是 $\overline{BE}$ 的中點，所以，點 D 是 $\overline{EH}$ 的中點，亦即：$\overline{DE}=\overline{DH}$。其次，在△$FBH$ 中，因為 $\overline{DR}$ 與 $\overline{BH}$ 平行，所以，可知 $\overline{DH}:\overline{DF}=\overline{BR}:\overline{FR}$。將前一等式代入後一等式，即得

$$\frac{\overline{DE}}{\overline{DF}}=\frac{\overline{BR}}{\overline{FR}}\text{。}$$

綜合上述兩結果，即得

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{DE}}{\overline{DF}}$$ 。||



證 2：因為直線 ABC 與直線 DEF 垂直，所以，$\overline{BE}$ 通過圓心 P 且 $\overline{CF}$ 通過圓心 Q。

若直線 BF 與連心線 PQ 平行，則在△BCF 中，因為點 Q 是 $\overline{CF}$ 的中點而點 A 是連心線 PQ 與直線 BC 的交點，所以，點 A 是 $\overline{BC}$ 的中點，即 $\overline{AB}=\overline{AC}$。另一方面，在△$BEF$ 中，因為點 P 是 $\overline{BE}$ 的中點而點 D 是連心線 PQ 與直線 EF 的交點，所以，點 D 是 $\overline{EF}$ 的中點，即 $\overline{DE}=\overline{DF}$。

設直線 BF 與連心線 PQ 交於一點 R。

在△BCF 中，因為共線的三點 A、Q、R 分別是直線 BC、CF、FB 上的 menelaus 點，所以，依 Menelaus 定理，可得

$$\left(-\frac{\overline{BA}}{\overline{AC}}\right)\times\frac{\overline{CQ}}{\overline{QF}}\times\frac{\overline{FR}}{\overline{RB}}=-1，\quad \frac{\overline{BA}}{\overline{AC}}\times\frac{\overline{FR}}{\overline{RB}}=1，\quad \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{BR}}{\overline{FR}}。$$

在△BEF 中，因為共線的三點 P、D、R 分別是直線 BE、FE、FB 上的 menelaus 點，所以，依 Menelaus 定理，可得

$$\frac{\overline{BP}}{\overline{PE}}\times\left(-\frac{\overline{ED}}{\overline{DF}}\right)\times\frac{\overline{FR}}{\overline{RB}}=-1，\quad \frac{\overline{ED}}{\overline{DF}}\times\frac{\overline{FR}}{\overline{RB}}=1，\quad \frac{\overline{DE}}{\overline{DF}}=\frac{\overline{BR}}{\overline{FR}}。$$

綜合上述兩結果，即得 $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{DE}}{\overline{DF}}$ 。||